

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Забайкальский государственный университет»

**А. Р. Верхотуров**  
**В. А. Шамонин**  
**С. Ю. Белкин**

# **Физика**

*Учебное пособие для бакалавров*

Чита  
Забайкальский государственный университет  
2018

УДК 53(075)

ББК 22.3я73

В 365

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом  
Забайкальского государственного университета

*Рецензенты*

**Б. А. Балаганский**, канд. физ.-мат. наук, ведущий доцент  
кафедры информатики и математики, Читинский институт  
Байкальского государственного университета, г. Чита

**Н. П. Степанов**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Забайкальский  
институт предпринимательства, г. Чита

**Верхотуров, Анатолий Русланович**

В 365

Физика : учебное пособие для бакалавров / А. Р. Верхотуров, В. А. Шамонин, С. Ю. Белкин ; Забайкал. гос. ун-т. – Чита : ЗабГУ, 2018. – 356 с.

ISBN 978-5-9293-2152-8

Учебное пособие содержит основные теоретические разделы курса общей физики, зачётные требования и задания по каждому разделу курса, списки вопросов для подготовки к экзаменам, библиографию.

Данное издание предназначено для студентов вузов, обучающихся по программам подготовки бакалавров. Может быть полезным и для студентов направлений подготовки специалистов.

УДК 53(075)

ББК 22.3я73

ISBN 978-5-9293-2152-8

© Забайкальский государственный  
университет, 2018

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	8
<b>Введение</b> .....	9
<b>Глава 1. Кинематика</b> ( <i>Верхотуров А. Р.</i> ) .....	12
1.1. Кинематические характеристики материальной точки .....	12
1.2. Скорость точки .....	13
1.3. Ускорение точки .....	16
1.4. Поступательное и вращательное движения твёрдого тела .....	20
<b>Глава 2. Динамика материальной точки</b> ( <i>Верхотуров А. Р.</i> ) .....	24
2.1. Основные законы классической механики .....	24
2.2. Уравнения динамики материальной точки .....	27
2.3. Силы, рассматриваемые в механике. Силы гравитации, тяжести, вес тела .....	28
2.4. Силы упругости .....	30
2.5. Силы трения .....	31
<b>Глава 3. Механическая система. Работа и энергия.</b>	
<b>Законы сохранения</b> ( <i>Верхотуров А. Р.</i> ) .....	34
3.1. Механическая система .....	34
3.2. Закон изменения и сохранения импульса. Закон движения центра масс механической системы .....	35
3.3. Кинетическая энергия .....	37
3.4. Работа и мощность .....	38
3.5. Закон изменения кинетической энергии .....	40
3.6. Потенциальная энергия .....	41
3.7. Закон изменения и сохранения механической энергии .....	43
3.8. Момент силы .....	45
3.9. Момент импульса .....	46
3.10. Закон изменения и сохранения момента импульса .....	47
3.11. Элементы динамики твёрдого тела. Момент инерции .....	50
3.12. Момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела во вращательном движении .....	51
3.13. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела .....	52
3.14. Работа и мощность вращающего момента. Закон изменения энергии во вращательном движении твёрдого тела .....	53
<b>Глава 4. Основы релятивистской механики</b> ( <i>Шамонин В. А.</i> ) .....	55
4.1. Принцип относительности Эйнштейна .....	55

4.2. Преобразование Лоренца для координат и времени .....	57
4.3. Следствия из преобразований Лоренца .....	60
4.4. Релятивистская механика .....	62
<b>Глава 5. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов</b>	
(Белкин С. Ю.) .....	71
5.1. Законы идеального газа .....	71
5.2. Уравнение Клапейрона – Менделеева .....	74
5.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов .....	75
5.4. Распределение молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения .....	77
5.5. Барометрическая формула .....	79
5.6. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах .....	81
5.7. Число степеней свободы молекулы .....	83
5.8. Теплоёмкость. Первое начало термодинамики. Работа газа .....	86
5.9. Адиабатический процесс. Политропный процесс .....	90
5.10. Круговые процессы (циклы) .....	92
5.11. Энтропия. Второе начало термодинамики .....	93
5.12. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно .....	97
<b>Глава 6. Реальные газы, жидкости и твёрдые тела (Белкин С. Ю.)</b> .....	99
6.1. Свойства реальных газов. Уравнение Ван-дер-Ваальса .....	99
6.2. Внутренняя энергия реального газа .....	102
6.3. Свойства жидкостей .....	104
6.4. Свойства твёрдых тел .....	106
6.5. Диаграмма состояния вещества .....	108
<b>Глава 7. Электрическое поле (Верхотуров А. Р.)</b> .....	114
7.1. Электрический заряд. Свойства заряда .....	114
7.2. Закон Кулона .....	115
7.3. Электростатическое поле в вакууме. Напряжённость поля .....	116
7.4. Принцип суперпозиции электростатических полей .....	118
7.5. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля .....	119
7.6. Расчёт электрических полей по теореме Остроградского – Гаусса .....	121
7.7. Работа электростатического поля. Циркуляция вектора $\vec{E}$ .....	124
7.8. Потенциал электростатического поля .....	125

7.9. Связь напряжённости и потенциала. Вычисление разности потенциалов .....	127
7.10. Диэлектрики в электрическом поле. Поляризованность диэлектрика .....	131
7.11. Напряжённость электростатического поля в диэлектрике .....	134
7.12. Электрическое смещение. Применение теоремы Остроградского – Гаусса к электростатическому полю в среде .....	136
7.13. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция .....	139
7.14. Электрическая ёмкость проводника. Конденсаторы, их ёмкости .....	141
7.15. Энергия уединённого проводника, системы зарядов, конденсатора. Энергия электростатического поля .....	145
<b>Глава 8. Постоянный электрический ток</b> ( <i>Верхотуров А. Р.</i> ) .....	148
8.1. Электрический ток. Сила, плотность тока .....	148
8.2. Сторонние силы. ЭДС. Напряжение .....	150
8.3. Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление проводника .....	152
8.4. Работа тока, мощность. Закон Джоуля – Ленца .....	155
8.5. Обобщённый закон Ома .....	157
8.6. Правила Кирхгофа. Расчёт разветвлённых цепей .....	158
<b>Глава 9. Электромагнитное поле</b> ( <i>Верхотуров А. Р.</i> ) .....	161
9.1. Магнитное поле. Основные свойства и характеристики .....	161
9.2. Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры .....	166
9.3. Магнитное поле движущегося заряда .....	168
9.4. Закон Ампера. Единицы измерения $\vec{B}$ и $\vec{H}$ . Взаимодействие двух параллельных проводников с токами .....	169
9.5. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле .....	171
9.6. Циркуляция вектора $\vec{B}$ . Закон полного тока в вакууме .....	176
9.7. Поток вектора $\vec{B}$ . Теорема Остроградского – Гаусса для магнитного поля .....	180
9.8. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца .....	181
9.9. Вращение рамки в магнитном поле .....	183
9.10. Вихревые токи .....	184
9.11. Индуктивность контура. Самоиндукция .....	185
9.12. Работа и энергия магнитного поля .....	186
9.13. Магнитный момент электрона, атома и молекулы .....	188

9.14. Намагниченность. Магнитное поле в среде. Условия на границе двух магнетиков .....	190
9.15. Диамагнетики и парамагнетики. Ферромагнетики .....	193
9.16. Вихревое электрическое поле .....	197
9.17. Ток смещения. Обобщённая теорема о циркуляции вектора напряжённости $\vec{H}$ .....	198
9.18. Уравнения электромагнитного поля .....	201
<b>Глава 10. Колебания в механических и электромагнитных системах.</b>	
<b>Упругие волны (Верхотуров А. Р.)</b> .....	210
10.1. Колебательное движение. Гармонические колебания .....	210
10.2. Свободные колебания механической системы .....	212
10.3. Свободные колебания в электромагнитном контуре .....	216
10.4. Затухающие колебания .....	218
10.5. Вынужденные колебания механической системы. Резонанс .....	221
10.6. Вынужденные колебания в электромагнитном контуре .....	223
10.7. Переменный ток .....	226
10.8. Резонансы в цепи переменного тока .....	230
10.9. Работа и мощность цепи переменного тока .....	233
10.10. Сложение двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами и направлением. Биения .....	234
10.11. Сложение нескольких гармонических колебаний. Гармонический анализ .....	237
10.12. Сложение двух взаимноперпендикулярных колебаний одинаковой частоты .....	238
10.13. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами .....	239
10.14. Волновые процессы. Виды волн .....	240
10.15. Уравнение волн .....	241
10.16. Интерференция волн .....	243
10.17. Стоячие волны .....	245
10.18. Звуковые волны .....	247
10.19. Эффект Доплера .....	250
10.20. Энергия волн. Мощность волны .....	251
<b>Глава 11. Электромагнитные волны. Свет (Верхотуров А. Р.)</b> .....	254
11.1. Электромагнитные волны. Уравнение волны .....	254
11.2. Энергия электромагнитных волн. Импульс электромагнитного поля .....	256
11.3. Основные законы геометрической оптики .....	258
11.4. Интерференция света .....	260
11.5. Дифракция света .....	266

11.6. Дисперсия света .....	272
11.7. Поглощение света .....	274
11.8. Эффект Доплера в оптике .....	276
11.9. Поляризация света .....	277
11.10. Фотометрические величины и единицы измерения .....	283
<b>Глава 12. Квантовые свойства электромагнитных волн</b>	
(Шамонин В. А.) .....	291
12.1. Законы теплового излучения тел .....	291
12.2. Квантовая гипотеза и формула Планка .....	293
12.3. Фотоэлектрический эффект .....	296
12.4. Эффект Комптона .....	298
<b>Глава 13. Элементы квантовой механики (Шамонин В. А.) .....</b>	<b>301</b>
13.1. Корпускулярно-волновой дуализм .....	301
13.2. Волновая функция. Операторы квантовой механики .....	303
13.3. Уравнение Шредингера .....	308
13.4. Частица в потенциальной яме .....	311
<b>Глава 14. Квантовомеханическое описание атомов и молекул</b>	
(Шамонин В. А.) .....	314
14.1. Боровская теория атома .....	314
14.2. Водородоподобный атом .....	317
14.3. Распределение электронов в атоме.	
Таблица элементов Д. И. Менделеева .....	320
14.4. Спонтанное и вынужденное излучение атомов. Лазеры .....	323
14.5. Электроны в кристаллах. Зонная структура	
энергетического спектра .....	326
<b>Глава 15. Атомное ядро и элементарные частицы (Шамонин В. А.) ..</b>	<b>329</b>
15.1. Состав и свойства ядер .....	329
15.2. Ядерные силы. Квантовая модель ядра .....	331
15.3. Радиоактивные превращения ядер .....	335
15.4. Ядерные реакции .....	339
15.5. Элементарные частицы .....	344
<b>Заключение .....</b>	<b>354</b>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>355</b>

## Предисловие

Предлагаемое пособие по курсу физики предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров, для которых предусмотрены полные или сокращённые программы по данной дисциплине. Представленные материалы соответствуют требованиям федеральных государственных образовательных стандартов по изучаемым разделам физики.

Работа содержит основные теоретические сведения по разделам классической механики, специальной теории относительности, молекулярной физики и термодинамики, электродинамики, теории колебаний и волн, волновой и квантовой оптике, квантовой механике, атомной физике, физике атомного ядра и элементарных частиц.

В конце глав 4, 6, 9, 11 и 15 приводятся зачётные требования и задания для самостоятельной работы студентов. В них даны перечень тем, вопросов для изучения по теоретическим разделам, а также многовариантные задания для выполнения в процессе самостоятельной подготовки к зачётам и экзаменам.

Авторы стремились к краткому изложению учебного материала, близкому к конспективному.

Выражаем благодарность за ценные замечания, сделанные рецензентами: доктором физико-математических наук Н. П. Степановым и кандидатом физико-математических наук Б. А. Балаганским.



## Введение

Физика исторически складывалась как наука о природе, об окружающем нас материальном мире.

Современная *физика* – наука, изучающая наиболее общие, фундаментальные законы движения, строения, существования материи в различных её формах, проявлениях, свойствах. Вследствие общности этих законов для различных видов движения материи физика лежит в основе всего естествознания.

Иными словами, физика – наука о наиболее общих законах движения вещества и поля, как основных видах существования материи, тесно связанных между собой. Вещество состоит из микрочастиц: атомов, молекул, ионов и т. д. Поле – особая форма существования и движения материи, посредством которого осуществляется взаимодействие между материальными телами, существуют различные физические поля: гравитационное (поле тяготения), электромагнитное и др.

Различные формы движения материи изучают различные науки: физика, химия, биология, физиология, геология и другие, которые тесно связаны с физикой. Эти науки изучают более сложные формы движения материи, в которых всегда проявляются изучаемые физикой общие формы её движения (механическая, тепловая, электромагнитная и т. д.).

По мере усложнения знаний, увеличения их объёма образовывались новые научные направления, перераставшие в отдельные науки: астрофизику, геофизику, биофизику, физическую химию, квантовую электронику и т. д.

Познание – объективный процесс, оно есть условие и средство существования человека и общества. Поэтому физика тесно связана с техникой, с практическими потребностями существования и развития общества, цивилизации. Эти потребности дают импульс к дальнейшему развитию науки, достижения которой становятся базой технического и социального прогресса человеческого общества. Поэтому физика является теоретической и экспериментальной основой создания новых технологий, производств, отраслей техники (радио, телевидение, связь, электро-

ника, информационная техника, ядерная физика, медицина и т. д.) наряду с другими науками и во взаимодействии с ними.

Основным методом исследований в физике является опыт, эксперимент, т. е. основанное на практике чувственно-эмпирическое познание объективной действительности как единство знаний, умений, навыков. Оно есть и процесс практического воздействия на внешний мир, и результат этого воздействия в виде знаний и умений.

*Физический опыт* – наблюдение исследуемого явления в точно учитываемых условиях, которые позволяют следить за ходом явления и многократно воспроизводить его при повторении этих условий.

На основе опытных данных выдвигаются гипотезы. *Гипотеза* – научное предположение, объясняющее физическое явление и требующее опытной проверки, а также теоретического обоснования, в результате которого создаётся достоверная *научная теория*. В её основе лежат *физические законы* – объективные закономерности, существующие в природе, неизменно повторяющиеся в одинаковых условиях, опытах.

В физике, как и в других науках, при изучении тех или иных явлений широко применяются физические модели. *Физическая модель* – теоретический или материальный объект, упрощённый по сравнению с реальным изучаемым объектом и учитывающий не всю совокупность его свойств, а лишь те из них, которые наиболее существенны с точки зрения изучаемого явления.

*Механика* – наука, изучающая простейшую форму движения материи – механическое движение. Механика является частью физики, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. *Релятивистская механика* открыла новые свойства пространства и времени, привела к открытию фундаментальных законов, определяющих энергию, импульс, массу для высоких скоростей.

*Молекулярная физика и термодинамика* изучают свойства и процессы, происходящие в молекулярных системах с помощью статистического и термодинамического методов.

*Электродинамика* описывает движение и взаимодействие зарядов в стационарных и переменных электрических и магнитных полях.

*Теория колебаний и волн* даёт описание и параметры колебательных и волновых процессов как для упругого взаимодействия тел, так и для электромагнитного.

*Квантовая механика* описывает движение и взаимодействие микрочастиц, используя принципиально новые положения корпускулярно-волнового дуализма, которые позволили открыть новые фундаментальные законы.

*Атомная физика* изучает свойства и структуру атомов и атомных ядер, а также частиц материи с точки зрения квантовой механики.

Предлагаемое учебное пособие включает в себя основные разделы: классическую механику, специальную теорию относительности, молекулярную физику и термодинамику, электродинамику, теорию колебаний и волн, квантовую оптику, квантовую механику, физику атома, атомного ядра и элементарных частиц.

# Глава 1. Кинематика

## 1.1. Кинематические характеристики материальной точки

Положение точки  $M$  в пространстве задается ее радиус-вектором – вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала координат т.О (тело отсчета) в точку  $M$  (см. рис. 1.1.1).

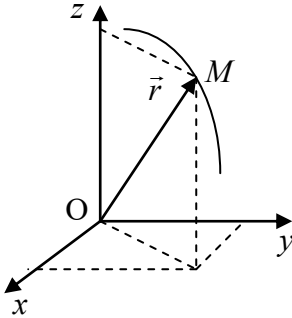


Рис. 1.1.1

*Совокупность тела отсчета, системы координат и часов называется системой отсчета.*

При движении точки радиус-вектор является функцией времени  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . В декартовой системе координат  $Oxyz$  положение материальной точки или в данном случае геометрической точки  $M$  определяется тремя координатами:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (см. рис. 1.1.1).

Координаты движущейся в пространстве точки изменяются и являются функциями времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (1.1.1)$$

где  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  – некоторые функции времени.

Уравнения (1.1.1) называются кинематическими уравнениями точки. Радиус-вектор и координаты точки связаны между собой формулами

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.1.2)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орты осей координат  $Oxyz$ : единичные векторы, определяющие направление осей и образующие правовинтовую систему векторов.

Перемещение точки за интервал времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  определяется в виде

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (1.1.3)$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \quad (1.1.4)$$

здесь  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  – радиус-векторы точки, соответствующие моментам времени  $t_1$  и  $t_2$  начала и конца перемещения;  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$  – проекции перемещения на оси, определяемые разностью координат точки в соответствующие моменты времени.

Для характеристики движения применяется также понятие: число степеней свободы тела. Число степеней свободы тела  $i$  – количество независимых параметров, однозначно определяющих положение тела в пространстве. Точка, движущаяся в пространстве, имеет три степени свободы; точка, движущаяся в плоскости  $Oxy$  – две степени свободы и т. д.

Траектория точки – геометрическая линия, по которой точка движется в пространстве.

Путь  $S$  – расстояние, пройденное точкой по траектории. Путь является функцией времени:

$$S = S(t), \quad (1.1.5)$$

эта функция называется *уравнением движения точки по траектории*.

Величина изменения пути

$$\Delta S = S_2 - S_1, \quad (1.1.6)$$

произошедшего за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ , и соответствующего перемещению  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , есть путь, пройденный точкой за это время.

## 1.2. Скорость точки

Для того чтобы охарактеризовать, как быстро изменяется положение точки в пространстве, применяется понятие скорости точки. Используются понятия средней скорости и мгновенной.

Под средней скоростью движения по траектории за конечное время  $\Delta t$  понимают отношение пройденного за это время конечного пути  $\Delta S$  ко времени  $\Delta t$ :

$$\langle v \rangle = v_s = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}, \quad (1.2.1)$$

что есть средняя путевая скорость.

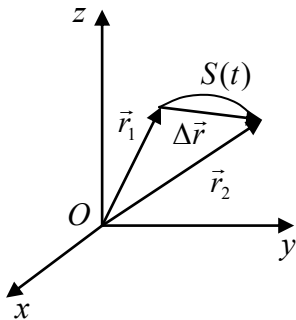


Рис. 1.2.1

Средняя скорость перемещения точки равна отношению перемещения ко времени (см. рис. 1.2.1), за которое оно произошло:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.2.2)$$

Эта скорость есть векторная величина, направленная вдоль вектора перемещения.

Мгновенная скорость точки в общем виде определяется как предел отношения перемещения ко времени в виде

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.2.3)$$

мгновенная скорость есть производная радиус-вектора точки по времени.

*Первый способ определения скорости по величине и направлению*

Если моменты времени  $t_1$ , и  $t_2$  бесконечно близки, то время  $\Delta t$  бесконечно мало и в этом случае обозначается через  $dt$ . За время  $dt$  точка проходит по траектории бесконечно малое расстояние  $dS$ , которому соответствует бесконечно малое перемещение  $d\vec{r}$ .

При этом  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta S} = 1$ , то есть по величине  $|d\vec{r}| = dr = dS$ .

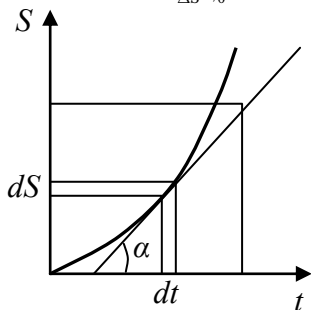


Рис. 1.2.2

Следовательно, величина скорости

$$v = v(t) = \frac{dS}{dt}, \quad (1.2.4)$$

равна производной пути по времени.

На рис. 1.2.2 показана зависимость пройденного пути  $S$  от времени  $t$ . Из рис. 1.2.2 видно, что тангенс

угла наклона касательной к оси  $t$  равен по величине скорости точки,

$$\frac{dS}{dt} = tg\alpha.$$

Интегрируя формулу (1.2.4), находим зависимость пути от времени:

$$S = S(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt. \quad (1.2.5)$$

Вектор скорости  $\vec{v}(t)$  направлен по касательной к траектории точки в данный момент времени  $t$ , так как в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  перемещение  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

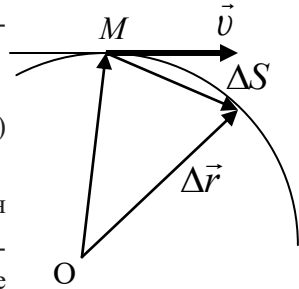


Рис. 1.2.3

(или  $d\vec{r}$ ) займет положение касательной к траектории в данной точке (см. рис. 1.2.3).

*Второй способ определения скорости по величине и направлению*

Для определения скорости радиус-вектор точки (1.1.2) подставим в (1.2.3) и продифференцируем по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (1.2.6)$$

Также вектор скорости можно представить в виде

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z. \quad (1.2.7)$$

Приравнявая правые части этих формул, получим

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.2.8)$$

проекции мгновенной скорости на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны первым производным по времени соответствующих координат точки или, иначе, производным от кинематических уравнений движения материальной точки  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$  по времени:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2(t)}{dt},$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3(t)}{dt}.$$

Величина скорости

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}. \quad (1.2.9)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории и величина его определяется по проекциям на оси координат.

Если точка движется в плоскости  $Oxy$ , то

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}. \quad (1.2.10)$$

### 1.3. Ускорение точки

В общем случае скорость точки при неравномерном криволинейном движении является функцией времени  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  и изменяется по величине и направлению. Быстрота изменения скорости точки характеризуется физической величиной, называемой ускорением.

Среднее ускорение точки равно отношению изменения скорости ко времени, за которое оно произошло

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.3.1)$$

Мгновенное ускорение точки в общем виде определяется как предел среднего ускорения в виде

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \quad (1.3.2)$$

мгновенное ускорение точки есть производная скорости точки по времени или вторая производная радиус-вектора точки по времени.

*Первый способ определения ускорения по величине и направлению*

Выразим скорость точки в виде

$$\vec{v} = \vec{\tau}v, \quad (1.3.3)$$



здесь  $\vec{\tau}$  орт касательной к траектории в данной точке.

Тогда ускорение представится в виде

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v, \quad (1.3.4)$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v, \quad (1.3.5)$$

производная  $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$  имеет вид  $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau} \cdot ds}{dt \cdot ds} = v \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ,

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta S} = \vec{n} \frac{d\tau}{ds} = \vec{n} \frac{1}{R}, \text{ здесь } ds = R \cdot d\phi, \quad d\tau = \tau \cdot d\phi.$$

В формуле (1.3.5) первое слагаемое называется тангенциальным (касательным) ускорением:

$$\vec{a}_t = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} = \vec{\tau} \cdot a_t, \quad a_t = \frac{dv}{dt}, \quad (1.3.6)$$

второе слагаемое – нормальным ускорением:

$$\vec{a}_n = \vec{n} a_n, \quad (1.3.7)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.3.8)$$

где  $\vec{n}$  – орт нормали к траектории;  $R = OM$  – радиус кривизны траектории в данной точке (см. рис. 1.3.1).

Тангенциальное (касательное) ускорение направлено по касательной к траектории в данной точке и характеризует быстроту изменения скорости точки  $M$  по величине.

Нормальное ускорение направлено по нормали к траектории в данной точке (к центру кривизны т.  $O$ ) и характеризует быстроту изменения скорости точки  $M$  по направлению.

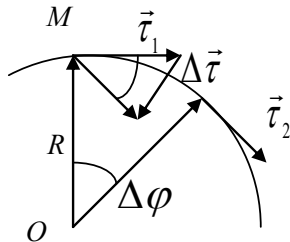


Рис. 1.3.1

Векторы тангенциального и нормального ускорений взаимно перпендикулярны, поэтому полное ускорение

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}. \quad (1.3.9)$$

Интегрируя формулу (1.3.6), можно найти зависимость скорости от времени. Зависимость скорости от времени

$$v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a_t(t) dt.$$

*Второй способ определения ускорения по величине и направлению*

В соответствии с формулой (1.3.2) продифференцируем скорость точки

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z \quad (1.3.10)$$

по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt}. \quad (1.3.11)$$

Также ускорение представим в виде

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z \quad (1.3.12)$$

Приравнивая правые части этих формул, получаем проекции мгновенного ускорения точки на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (1.3.13)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}. \quad (1.3.14)$$

Если точка движется в плоскости  $Oxy$ ,  $a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$ .

Направление вектора  $\vec{a}$  находится при помощи углов в виде:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}. \quad \alpha, \beta, \gamma - \text{углы между вектором}$$

ускорения и осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.

### Частные случаи движения точки

Рассмотрим частные случаи движения точки, зависящие от значений касательного и нормального ускорений (см. рис. 1.3.2, 1.3.3):

1)  $a_{\tau} = a_t = 0$ ,  $a_n = 0$ , – равномерное прямолинейное движение точки, уравнения которого

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 = \text{Const} \\ S &= S_0 + v_0 t \end{aligned} \right\} \text{или } x = x_0 + v_x t; \quad (1.3.15)$$

2)  $a_{\tau} = 0$ ,  $a_n = \text{const}$ ,  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , равномерное движение по окружности. Уравнения движения точки:  $v = v_0 = \text{Const}$ ,  $S = S_0 + vt$ ;

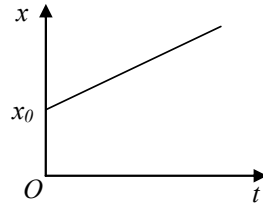
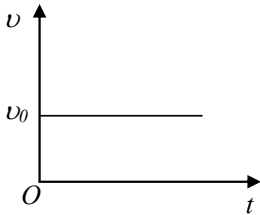


Рис. 1.3.2. Зависимость скорости и пути точки от времени при равномерном движении

3)  $a_{\tau} = \text{const}$ ,  $a_n = 0$ , равнопеременное прямолинейное движение;

$a_{\tau} > 0$  равноускоренное прямолинейное движение, если  $v > 0$ ;

$a_{\tau} < 0$  – равнозамедленное прямолинейное движение, если  $v < 0$ .

Уравнения движения точки:

$$v = v_0 + a_{\tau} t, \quad S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_{\tau} t^2, \quad \text{или } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2;$$

4)  $a_t = const, a_n \neq 0$ , равнопеременное криволинейное движение.



Рис. 1.3.3. Зависимость скорости и пути точки от времени при равноускоренном движении

Уравнения движения точки

$$v = v(t) = v_0 + a_t t, \quad S = S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 .;$$

5) в общем случае ускорения являются функциями времени  $a_t = a_t(t)$ ,  $a_n = a_n(t)$ , что соответствует неравномерному криволинейному движению точки. Уравнения движения точки в общем виде

$$\vec{v} = \vec{v}(t), \quad S = S(t) .$$

#### 1.4. Поступательное и вращательное движения твёрдого тела

Поступательное движение твёрдого тела – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению за все время движения.

При этом все скорости и ускорения точек тела одинаковы, а траектории точек имеют одинаковый вид, но смещены относительно друг друга на величину расстояния между точками. Поэтому достаточно рассмотреть одну точку тела и найти её кинематические параметры методами кинематики точки.

Вращательное движение тела – такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям вокруг неподвижной прямой, называемой осью вращения.

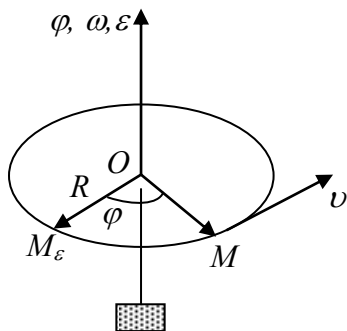


Рис. 1.4.1

$$, 1 \text{ рад} = \phi_1 = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ .$$

Зависимость угла поворота тела от времени  $\phi = \phi(t)$  называется уравнением вращательного движения тела.

Быстрота вращения тела характеризуется *угловой скоростью*  $\omega$ .

Средняя угловая скорость

$$\omega_{cp} = \langle \omega \rangle = \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

где  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  – изменение угла поворота тела за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ , средняя угловая скорость тела равна отношению изменения угла поворота ко времени, за которое оно произошло.

*Мгновенная угловая скорость* определяется как предел средней угловой скорости:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \phi'(t). \quad (1.4.1)$$

Мгновенная угловая скорость тела есть производная угла поворота по времени. Быстрота изменения угловой скорости характеризуется *угловым ускорением*.

Среднее угловое ускорение тела есть отношение изменения угловой скорости ко времени, за которое оно произошло:

$$\epsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.4.2)$$

Положение вращающегося тела в пространстве определяется *углом поворота*  $\phi$  (см. рис. 1.4.1).

За один полный оборот т. М тела проходит путь  $S = 2\pi R$ , которому соответствует угол  $\phi = 2\pi(\text{рад})$ .

Угол поворота и радиус связаны соотношением  $S = R\phi$  или  $\Delta S = R\Delta\phi$ . Тогда  $2\pi(\text{рад}) = 360^\circ$

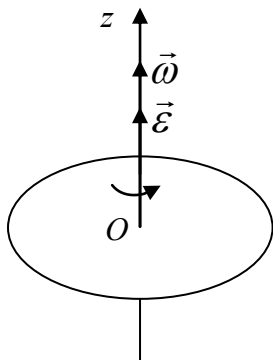


Рис. 1.4.2

Мгновенное угловое ускорение есть производная угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t) = \phi''(t). \quad (1.4.3)$$

Угловая скорость графически изображается в виде вектора  $\vec{\omega}$ , направленного вдоль оси вращения тела в соответствии с правилом правого винта. Также изображается вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  (см. рис. 1.4.2).

Скорость точки  $M$  вращающегося тела

$$v = v(t) = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R\phi)}{dt} = R\omega. \quad (1.4.4)$$

Вектор скорости направлен по касательной к окружности, т. е. перпендикулярно радиусу.

Касательное ускорение точки  $M$  тела

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = \varepsilon R. \quad (1.4.5)$$

Вектор тангенциального ускорения направлен по касательной к окружности, перпендикулярно радиусу точки (см. рис. 1.4.3).

Нормальное ускорение точки  $M$  тела

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.4.6)$$

Вектор нормального ускорения направлен по нормали к окружности, вдоль радиуса к центру окружности, поэтому данное ускорение называется также центростремительным.

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \quad \text{или} \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (1.4.7)$$

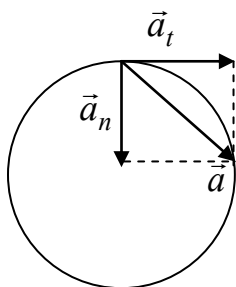


Рис. 1.4.3

Угол  $\alpha$  между полным  $\vec{a}$  и нормальным  $\vec{a}_n$  ускорениями определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\alpha = \left( \frac{a_n}{a_t} \right), \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{a_n}{a_t} \right). \quad (1.4.8)$$

Рассмотрим частные случаи вращательного движения тела.

1. Равномерное вращение – движение твердого тела с постоянной угловой скоростью. Уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \operatorname{const} \\ \phi &= \phi_0 + \omega t \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.9)$$

где  $\phi_0$  – начальный угол поворота тела в момент времени  $t = 0$ ;

если  $\phi_0 = 0$ ,  $\phi = \omega t$ .

Частота вращения  $n$  есть число оборотов тела, совершаемое за одну секунду. Связь угловой скорости и частоты вращения:

а)  $\omega = 2\pi n$  ( $p/c$ );

б)  $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$  ( $p/c$ ), если  $n$  задано в оборотах в минуту.

Период вращения – время одного полного оборота тела

$$T = \frac{1}{n}.$$

2. Равнопеременное вращение тела – вращение с постоянным угловым ускорением. Уравнения движения тела

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t \\ \varepsilon &= \operatorname{const}, \quad \phi = \phi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.10)$$

Если  $\omega > 0$  и  $\varepsilon > 0$  или  $\omega < 0$  и  $\varepsilon < 0$ , вращение тела является равноускоренным; если  $\omega > 0$  и  $\varepsilon < 0$  или  $\omega < 0$  и  $\varepsilon > 0$ , вращение тела равнозамедленное.

## Глава 2. Динамика материальной точки

### 2.1. Основные законы классической механики

Законы классической механики были опубликованы И. Ньютоном в 1687 году, в трактате «Математические начала натуральной философии». Эти законы составляют основу классической механики или, иначе, динамики материальной точки, и являются системой взаимосвязанных законов.

I. Закон инерции.

*Материальное тело (точка) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют другие тела (силы).*

Инертность – есть свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Вторая формулировка: изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Изолированная точка такая, на которую не действуют другие тела (силы) или действует уравновешенная система сил.

Система отсчета, в которой выполняется I закон, называется *инерциальной*. Этот закон утверждает существование инерциальных систем отсчета (ИСО). Инерциальная система отсчета (ИСО) – система отсчета, в которой выполняется закон инерции.

Примеры ИСО:

1. Гелиоцентрическая система, центр которой расположен в центре Солнца, а оси направлены на неподвижные звезды.

2. Лабораторная ИСО – система отсчета, связанная с поверхностью Земли и условно принимаемая за неподвижную. Применяется в задачах, где можно пренебречь вращением Земли.

Краткая запись I закона:

$$\text{если } \vec{F} = 0, \text{ то } \vec{v} = \text{const}. \quad (2.1.1)$$

II. Второй закон Ньютона: *ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее силе и обратно пропорционально массе точки:*

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2.1.2)$$



устанавливает прямо пропорциональную зависимость между ускорением материальной точки и силой, действующей на нее;

здесь  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку.

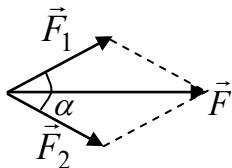


Рис. 2.1.1

Сила есть векторная физическая величина, характеризуемая направлением, величиной (модулем) и точкой приложения. Сила является мерой механического взаимодействия тел.

В общем случае, если на точку действует две силы (см. рис. 2.1.1) или несколько, результирующая сила определяется в виде векторной суммы всех сил и называется равнодействующей:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.1.3)$$

где  $n$  количество сил (см. рис. 2.1.1).

Правило сложения двух сил – правило параллелограмма:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Во втором законе  $m$  – масса тела, физическая величина, определяющая его инертные свойства (она называется инертной массой). Масса также определяет и гравитационные свойства тела.

В классической механике масса тела является постоянной величиной,  $m = const$ . Тогда закон можно записать в виде

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \quad (2.1.4)$$

$\vec{p} = m\vec{v}$ , импульс материальной точки. Следовательно, второй закон запишется в форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.1.5)$$

производная импульса материальной точки по времени равна силе, действующей на точку. Здесь масса тела в общем случае может быть и переменной величиной.

В механике справедлив принцип независимости действия сил: если на тело действует несколько сил, то каждая сообщает телу ускорение независимо от других сил:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n; \quad \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}; \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}; \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}; \\ m\vec{a} &= \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}; \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \frac{\vec{F}_n}{m}; \\ \vec{a} &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i.\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

Принцип независимости действия сил, или принцип суперпозиции сил, позволяет складывать силы и ускорения, а также раскладывать их на составляющие по заданным направлениям (осям координат), что значительно облегчает решение задач.

Вторым фундаментальным принципом классической механики является принцип относительности [7; 9], или принцип относительности Галилея.

Второй закон Ньютона является экспериментальным и подтверждается опытным путем. Для определения ускорения точки из этого закона необходимо знать способы вычисления сил в различных случаях, знать законы взаимодействия материальных тел и силовых полей.

III. Третий закон Ньютона: силы, с которыми взаимодействуют между собой две материальные точки, равны по величине и направлены вдоль прямой, проходящей через эти точки в противоположные стороны:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},\tag{2.1.7}$$

здесь  $\vec{F}_{12}$  – сила, с которой на первое тело действует второе тело,  $\vec{F}_{21}$  – сила, с которой на второе тело действует первое тело, рис. 2.1.2. Это положение в механике называется также законом равенства сил действия и противодействия и постулируется на все виды взаимодействий материальных тел. В классической механике считается, что силы взаимодействия двух тел (точек) существу-

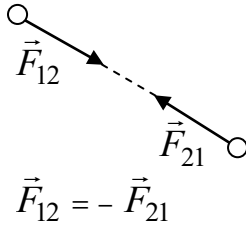


Рис. 2.1.2

ют попарно и имеют одинаковую природу, определяемую видом взаимодействия.

Границы применимости законов классической механики определяются ограничениями по скорости и массе тел: скорости тел значительно меньше скорости света ( $v \ll c$ ), массы тел велики по сравнению с массами микрочастиц.

## 2.2. Уравнения динамики материальной точки

Уравнение (2.1.2) можно представить в виде

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.2.1)$$

здесь  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ ,  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$ .

Уравнение (2.2.1) является дифференциальным уравнением динамики точки второго порядка в векторной форме.

В проекциях на оси декартовой системы координат  $Oxyz$  получим три алгебраических уравнения:

$$ma_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad ma_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad ma_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (2.2.2)$$

которые являются уравнениями динамики материальной точки относительно осей координат. Эти уравнения, учитывая, что проекции ускорения точки на оси равны вторым производным соответствующих координат по времени, можно записать в виде дифференциальных уравнений второго порядка, поскольку  $\ddot{x} = a_x$ ,  $\ddot{y} = a_y$ ,  $\ddot{z} = a_z$ .

Естественные оси координат: касательная, нормаль, бинормаль, орты которых  $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$  образуют правую систему векторов.

В проекциях на оси естественной системы координат  $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$  уравнения динамики материальной точки примут вид

$$ma_{\tau} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau}, \quad ma_n = \sum_{i=1}^n F_{in}, \quad 0 = \sum_{i=1}^n F_{ib}, \quad (2.2.3)$$

так как ускорение точки в криволинейном движении имеет две составляющих: касательное  $a_t$  и нормальное  $a_n$  ускорения.

## 2.3. Силы, рассматриваемые в механике.

### Силы гравитации, тяжести, вес тела

В физике все силовые взаимодействия делятся на четыре вида: 1) гравитационное – осуществляется посредством гравитационного поля; 2) электромагнитное – осуществляется посредством электромагнитного поля; 3) ядерное (сильное) – удерживает элементарные частицы в атомном ядре; 4) слабое взаимодействие – определяет процессы взаимного превращения микрочастиц.

В классической механике обычно рассматриваются гравитационные силы, силы тяжести, силы упругости, силы трения.

*Сила гравитации* определяется законом всемирного тяготения Ньютона, согласно которому два материальных тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \frac{mM}{r^2}, \quad (2.3.1)$$

здесь  $G$  – гравитационная постоянная;  $m_1$  и  $m_2$  – массы взаимодействующих тел;  $r$  – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки). С физической точки зрения соотношение (2.3.1) описывает взаимодействие массы  $m$  с полем тяготения, или, иначе, с гравитационным полем, создаваемым в пространстве массой  $M$ . Эксперимент показывает, что с каждой массой в пространстве связано гравитационное поле. Например, гравитационное поле Солнца, Земли, других планет, материальных тел и т. д.

Гравитационная постоянная  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$ . Впервые экспериментально была измерена английским физиком Г. Кавендишем.

*Сила тяжести* – сила тяготения, действующая на тело массой  $m$  у поверхности Земли:

$$F = G \frac{m \cdot M_3}{R_3^2}, \quad (2.3.2)$$

здесь  $M_3$  масса Земли и  $R_3$  радиус Земли. Из закона всемирного тяготения следует, что у поверхности Земли все тела должны падать с одинаковым ускорением. По второму закону Ньютона ускорение, приобретаемое телом с массой  $m$  у поверхности Земли  $a = F/m$ , где  $F$  сила, с которой тело притягивается земным шаром. Отсюда ускорение

$$a = G \frac{M_3}{R_3^2} = g \quad (2.3.3)$$

и не зависит от массы падающего тела. Таким образом, все тела у поверхности Земли независимо от их массы падают с одинаковым ускорением, которое называется ускорением свободного падения. Подставляя известные значения величин  $G$ ,  $M_3$ ,  $R_3$ , получим теоретическую величину  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Вычисленное значение  $g$  немного отличается от экспериментальных значений в различных точках, что объясняется вращением и неидеальной формой Земли, а также геологическими факторами.

Ускорение свободного падения или ускорение силы тяжести на экваторе  $g = 9,78 \text{ м/с}^2$ , на полюсах  $g = 9,83 \text{ м/с}^2$ .

Итак, согласно второму закону Ньютона это означает, что в поле тяжести Земли любое тело находится под действием силы тяжести, равной  $\vec{P} = m\vec{g}$ , модуль которой  $P = mg$ .

*Вес тела*  $\vec{P}^*$  сила, с которой тело действует на опору (или подвес), препятствующую свободному падению тела. Рассмотрим пример: движение тела, поднимаемого на тросе, по вертикали относительно оси  $Oy$ :

а) тело неподвижно или движется с постоянной скоростью  $\vec{v} = \text{const}$ , при этом ускорение тела  $\vec{a} = 0$ , геометрическая сумма всех сил, действующих на тело

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad (2.3.4)$$

есть условие равновесия тела. В проекции на ось  $Oy$  уравнение движения тела примет вид (см. рис. 2.3.1),  $ma = N - mg$ , или  $0 = N - mg$ , где  $N = mg$  сила натяжения троса (реакция троса).

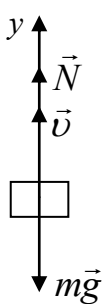


Рис. 2.3.1

По определению сила веса тела равна по величине и направлена противоположно реакции  $\vec{N}$ :

$$P^* = -\vec{N}, \quad (2.3.5)$$

вес тела по величине  $|P^*| = N = mg$  равен силе тяжести;

б) тело движется с ускорением  $\vec{a}$ , направленным вверх по оси  $Oy$ :  $ma = N - mg$ ,  $N = mg + ma$ ,

$|P^*| = N = mg + ma$ , следовательно, вес больше силы тяжести.

## 2.4. Силы упругости

Все реальные тела под действием внешних сил деформируются, при этом изменяются форма и объем тела. При деформировании в теле возникают силы упругости, противодействующие внешним нагрузкам. На элементарном уровне они имеют электромагнитную природу. Деформации тела делятся на упругие и пластические.

Упругая деформация – деформация, которая исчезает после снятия нагрузки, тело восстанавливает свою форму и размеры. Пластическая – деформация, которая сохраняется, полностью или частично.

Сила упругости определяется, согласно закону Гука, в виде прямо пропорциональной зависимости силы от деформации:

$$F = k\lambda, \quad (2.4.1)$$

или в проекции на ось  $Ox$ :

$$F_x = -kx, \quad (2.4.2)$$

где  $k$  – коэффициент жесткости (в случае пружины  $k = c$ , жесткость пружины);  $\lambda = l - l_0 = \Delta l$ , – абсолютная деформация растяжения или сжатия;  $l$  – длина тела в деформированном состоянии,  $l_0$  – длина тела в недеформированном состоянии;  $x = l - l_0$ , деформация пружины вдоль оси  $Ox$ .

Закон Гука записывается также в виде

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.4.3)$$

здесь  $\sigma = \frac{F}{S}$ , – напряжение, величина равная отношению силы  $F$  к площади поперечного сечения  $S$ ;  $E$  – модуль Юнга (модуль упругости);  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  – относительная деформация растяжения (сжатия).

Закон Гука справедлив до предела пропорциональности  $\sigma_{II}$ , выше которого зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (диаграмма напряжений [7; 9]) становится нелинейной.

## 2.5. Силы трения

Силы трения возникают при скольжении одного тела по поверхности другого тела и препятствуют движению, т. е. направлены противоположно относительной скорости тела. Эти силы могут иметь различную природу.

Силы трения могут иметь различную природу, но под их действием механическая энергия всегда превращается в другие виды энергии: внутреннюю энергию соприкасающихся тел и другие.

Различают внешнее трение (сухое) и внутреннее (вязкое). Силы внешнего трения возникают на поверхности двух соприкасающихся тел в касательной плоскости и обусловлены шероховатостью их поверхностей. Если тела неподвижны относительно друг друга, но имеются силы, стремящиеся их сдвинуть, то возникает сила трения покоя (сцепления). Если тело перемещается, возникает сила трения скольжения или качения, если тело катится по поверхности другого тела.

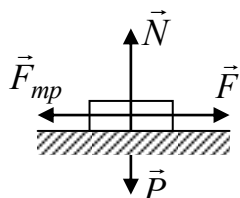


Рис. 2.5.1

Внутреннее трение – это трение между частями одного и того же тела или между слоями движущейся жидкости или газа. Трения покоя в этом случае нет.

Закон Амонтона – Кулона определяет силу сухого трения скольжения в виде

$$F_{\text{тр}} = fN, \quad (2.5.1)$$

где  $f$  – коэффициент трения;  $N$  сила нормального давления между взаимодействующими телами (нормальная реакция поверхности на рис. 2.5.1).

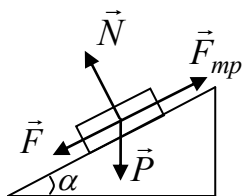


Рис. 2.5.2

Рассмотрим тело, лежащее на наклонной плоскости (см. рис. 2.5.2). Сила, стремящаяся сдвинуть тело вниз:  $F = P \cdot \sin \alpha = mg \sin \alpha$ .

Сила трения  $F_{тр}$  в состоянии покоя равна по величине и противоположна по направлению силе  $F$ . Сила нормального давления (нормальная реакция):  $N = mg \cdot \cos \alpha$ .

Если угол наклона плоскости увеличить, тело начнет скользить при условии  $F \geq F_{mp}$ , т. е. при условии  $mg \cdot \sin \alpha = fmg \cdot \cos \alpha$ .

Следовательно, коэффициент трения  $f = \operatorname{tg} \alpha_{np}$ .

Если поверхности тел достаточно гладкие, чтобы между ними возникли силы межмолекулярного притяжения, сила трения определяется в виде

$$F = f_0 (N + p_0 S), \quad (2.5.2)$$

здесь  $f_0$  истинный коэффициент трения скольжения для данных поверхностей,  $p_0$  добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения,  $S$  площадь поверхности контакта между телами.

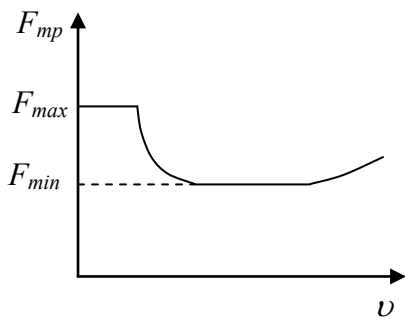


Рис. 2.5.3

В общем случае сила трения может зависеть от многих факторов: скорости тела, температуры поверхности, удельного давления и др. Зависимость силы сухого трения от скорости, полученная экспериментально, дана на рис. 2.5.3.

При качении одного тела по поверхности другого возникает сила трения качения, определяемая в виде

$$F_k = f_k \frac{N}{R}. \quad (2.5.3)$$



Здесь  $f_k$  – коэффициент трения качения;  $R$  – радиус катящегося тела (колеса, цилиндра, шарика и т. д.). Эта сила значительно меньше силы трения скольжения.

Силы вязкого трения рассматриваются в разделах, в которых изучаются основы механики жидкости и газа [7; 9]. При движении тел в газах или жидкостях возникают силы сопротивления среды, которые зависят от скорости тела, его формы и вязкости жидкости. При небольших скоростях движения сила сопротивления  $\vec{F}_c$  линейно зависит от скорости тела в виде

$$\vec{F}_c = -k_1 \vec{v} \quad (2.5.4)$$

здесь  $k_1$  – коэффициент, зависящий от формы тела и вязкости жидкости или газа;  $\vec{v}$  – скорость тела. При больших скоростях сила  $\vec{F}_c$  зависит от квадрата скорости

$$\vec{F}_c = -k_2 \vec{v} \cdot v, \quad (2.5.5)$$

где  $F_c = k_2 v^2$  – величина силы,  $k_2$  – коэффициент, зависящий от формы, размеров тела, вязкости жидкости, газа и др.

## Глава 3. Механическая система. Работа и энергия. Законы сохранения

### 3.1. Механическая система

Механическая система – совокупность материальных точек или тел, взаимодействующих между собой.

Силы, действующие на механическую систему, делятся на внешние  $\vec{F}$  и внутренние  $\vec{F}^i$ . *Внешние силы* – силы взаимодействия механической системы с телами, не входящими в эту систему. *Внутренние силы* – силы взаимодействия между материальными точками (телами), входящими в данную систему.

Механическая система называется замкнутой (изолированной), если внешние силы на нее не действуют. Это возможно, если действием внешних сил на систему в некоторых условиях можно пренебречь, а также, если сумма всех внешних сил равна нулю (внешние силы уравновешиваются).

Уравнения движения механической системы выводятся на основе законов классической механики. При изучении движения механических систем вводятся динамические характеристики, характеризующие систему в целом, такие, как суммарный импульс системы, кинетическая энергия системы, потенциальная энергия, полная механическая энергия, момент импульса системы и др. В процессе движения системы эти физические величины изменяются под действием внешних и внутренних сил, действующих на систему, в соответствии с законами и уравнениями динамики. Для замкнутых систем эти уравнения можно проинтегрировать в общем виде и получить первые интегралы движения, которые называются также законами сохранения. Это законы сохранения импульса, энергии, момента импульса. В основе законов сохранения импульса, энергии, момента импульса лежат соответственно свойства однородности пространства, времени, изотропности пространства.

Однородность пространства означает, что уравнения движения системы не изменяются при параллельном переносе системы отсчета. Однородность времени означает, что уравнения движения не изменяются, если начало отсчета времени сдвигается на некоторую конечную величину. Изотропность пространства означа-

ет, что уравнения движения не изменяются при повороте системы координат на некоторый угол.

### 3.2. Закон изменения и сохранения импульса. Закон движения центра масс механической системы

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n$ , скоростями  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_n$  и импульсами  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_k, \dots, \vec{p}_n$  соответственно. На каждую точку системы действуют равнодействующие внешних и внутренних сил  $\vec{F}_k$  и  $\vec{F}_k^i$ . Импульсы материальных точек системы  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1, \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2, \dots, \vec{p}_n = m_n \vec{v}_n$ . Каждая из этих точек движется в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_1^i, \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_2^i, \dots, \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_n + \vec{F}_n^i. \quad (3.2.1)$$

Складывая эти уравнения, получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_k + \sum_{i=1}^n \vec{F}_k^i. \quad (3.2.2)$$

Импульс материальной системы есть суммарный импульс всех материальных точек, составляющих систему  $\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k$ .

Изменяя порядок дифференцирования и суммирования и учитывая, что сумма всех внутренних сил системы  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_k^i = 0$ , – в соответствии с третьим законом Ньютона, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \vec{F}, \vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k, \sum_{i=1}^n \vec{F}_k = \vec{F}, \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.2.3)$$

что есть закон изменения импульса. Производная импульса  $\vec{P}$  механической системы по времени равна геометрической сумме всех внешних сил  $\vec{F}$ , действующих на систему.

В замкнутой механической системе выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_k = \vec{F} = 0, \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \quad (3.2.4)$$

Из этого следует

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \text{const}. \quad (3.2.5)$$

что представляет собой закон сохранения импульса. Импульс замкнутой механической системы не изменяется.

В проекциях на оси декартовой системы координат закон (3.2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = \text{const}, \text{ если } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ P_y &= \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = \text{const}, \text{ если } \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ P_z &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = \text{const} \text{ если } \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

В частных случаях движения системы может выполняться одно или два из этих уравнений.

Из закона (3.2.3) следует закон движения центра масс механической системы. Центр масс системы т. С – геометрическая точка, положение которой определяется ее радиус-вектором  $\vec{r}_C$  в виде

$$M\vec{r}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad (3.2.7)$$

здесь  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  – масса системы;  $M = \text{const}$ ;  $m_k$ ,  $\vec{r}_k$  – масса

и радиус-вектор некоторой точки системы.

Координаты центра масс системы

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k, \quad M = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Дифференцируя (3.2.7) по времени и учитывая, что массы точек и системы постоянны, получим

$$M \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}, \quad M \vec{v}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k \quad (3.2.8)$$

где  $\vec{v}_C$  есть скорость центра масс системы.

Из этого следует, что импульс системы

$$\vec{P} = M \vec{v}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k, \quad (3.2.9)$$

и тогда из (3.2.3) следует

$$\frac{d(M \vec{v}_C)}{dt} = \vec{F}, \quad M \vec{a}_C = \vec{F}, \quad (3.2.10)$$

что является законом движения центра масс: *центр масс механической системы движется как материальная точка, имеющая массу системы, под действием суммы всех внешних сил, действующих на систему.*

Закон движения центра масс относительно осей координат:

$$M a_{Cx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad M a_{Cy} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad M a_{Cz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

В дифференциальной форме:  $M \ddot{x}_{Cx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$  и т. д.

### 3.3. Кинетическая энергия

В механике существуют две меры механического движения: импульс и кинетическая энергия. Энергия механического движения материального тела называется *кинетической энергией*.

Кинетическая энергия материальной точки массой  $m$  или тела, движущегося поступательно со скоростью  $v$ , относительно некоторой инерциальной системы отсчета определяется формулой

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.3.1)$$

или

$$E_K = \frac{p^2}{2m}, \quad p = mv. \quad (3.3.2)$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек (тел), входящих в эту систему:

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2. \quad (3.3.3)$$

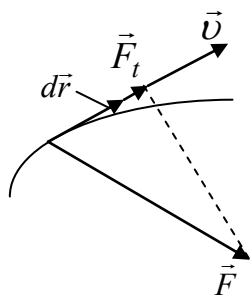
Кинетическая энергия системы зависит от ее массы и скоростей точек и является функцией состояния ее движения. Кинетическая энергия всегда положительна. Она зависит также от выбора системы отсчета, в которой рассматривается движение, поскольку скорость тела неодинакова в различных системах отсчета и зависит от того, движется или покоится данная система отсчета.

Кинетическая энергия материальной точки, движущейся произвольно относительно инерциальной системы отсчета, может быть записана в виде

$$E_K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (3.3.4)$$

### 3.4. Работа и мощность

Работа силы как физическая величина вводится с целью количественного описания процесса обмена энергией между материальными телами при их взаимодействии и движении.



Элементарная работа силы  $\vec{F}$  определяется в виде скалярного произведения силы на элементарное перемещение точки приложения силы (см. рис. 3.4.1)

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.4.1)$$

что можно записать в двух формах, первая:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F |d\vec{r}| \cos \alpha \quad \text{или} \\ dA = F dS \cos \alpha = F_t dS, \quad (3.4.2)$$

здесь  $\alpha$  – угол между силой и перемещением;  $|d\vec{r}| = dS$  (см. п. 1.2), и вторая форма:

Рис. 3.4.1

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (3.4.3)$$

здесь  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы на оси;  $dx, dy, dz$  – элементарные перемещения точки относительно осей координат.

Работа силы на конечном участке пути при перемещении точки из начального положения 1 в конечное положение 2 равна сумме ее элементарных работ на всех элементарных участках пути и выражается в виде интеграла

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_l dS \quad (3.4.4)$$

или

$$A = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.4.5)$$

Примеры вычисления работы:

1. Работа постоянной силы:

$$F = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}, \quad A(F) = \int_1^2 F dS \cos \alpha = F \cos \alpha S = F_l S.$$

2. Работа силы трения:

$$F_{mp} = \text{const}, \quad A(F_{mp}) = \int_1^2 F_{mp} dS \cos \alpha = -F_{mp} S.$$

3. Работа силы тяжести:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{g} = \text{const} : \\ m\vec{g} &= (0, 0, -mg), \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$A(m\vec{g}) = \int_{Z_1}^{Z_2} F_z dz = mg(Z_1 - Z_2).$$

4. Работа силы упругости:

$$F = c\lambda, \quad F_x = -cx, \quad A(F_{ynp}) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} c(x_1^2 - x_2^2).$$

5. Работа силы гравитации:

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Её проекция на радиус-вектор  $\vec{r}$   $F_r = -G \frac{Mm}{r^2}$  вычисляется

в виде

$$A(F_G) = \int F_r dr = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Для характеристики скорости совершения работы применяется понятие мощности силы. *Мощность силы есть скалярная физическая величина, равная отношению работы силы ко времени, за которое она была совершена:*

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad N = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha = F_t v. \quad (3.4.7)$$

Данная формула определяет мгновенную мощность силы, поскольку сила и скорость в общем случае являются переменными величинами.

Работа силы за некоторое время

$$A = A(t) = \int_0^{t_1} N dt = \int_0^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_0^{t_1} F_t v dt, \quad (3.4.8)$$

если мощность  $N = const$ ,  $A = Nt$ .

### 3.5. Закон изменения кинетической энергии

Рассмотрим движение материального тела массой  $m$ , принимаемого за материальную точку под действием силы  $\vec{F}$ . Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (3.5.1)$$



На элементарном перемещении  $d\vec{r}$  сила совершит работу  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Из (3.5.1) получаем  $\frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , или  $d(m\vec{v}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ,  $\vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = dA$ ,  $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$ ,  $dE_K = dA$ .

Интегрируя эту формулу на пути 1–2, получим формулу

$$E_{2K} - E_{1K} = A_{12}, \quad \Delta E_K = A_{12}, \quad (3.5.2)$$

что выражает собой закон изменения кинетической энергии материальной точки или тела, движущегося поступательно: *изменение кинетической энергии материальной точки равно работе силы, действующей на точку, на ее пути из начального 1 в конечное 2 положение.*

В общем случае сила  $\vec{F}$  равна векторной сумме всех  $n$  сил, действующих на точку,  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_k$ , и тогда работа силы  $\vec{F}$  равна алгебраической сумме работ всех сил  $\vec{F}_k$  на данном пути 1–2:

$$A = \sum_{k=1}^n A_k :$$

$$A = \sum_{k=1}^n \int_1^2 \vec{F}_k \cdot d\vec{r} .$$

### 3.6. Потенциальная энергия

*Потенциальная энергия – механическая энергия системы материальных тел, определяемая их взаимным расположением и типом взаимодействия.*

Силовое поле – область пространства, в каждой точке которого однозначно определена сила  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ , действующая на материальное тело в данный момент времени в данной точке поля.

Потенциальное силовое поле – поле, в котором работа силы поля не зависит от формы траектории точки, и определяется лишь начальным и конечным положением точки.

Поле  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , не зависящее от времени, называется *стационарным*. Сила потенциального поля называется *консервативной*.

Величина потенциальной энергии  $U(\vec{r}) = E_{II}(\vec{r})$  определяется работой поля по перемещению тела из данного положения в положение, принятое за начало отсчета потенциальной энергии (нулевой уровень):

$$E_{1II} = A_{1,0}, \quad E_{2II} = A_{2,0}, \quad A_{12} = E_{1II} - E_{2II}.$$

Поэтому работа и потенциальная энергия связаны соотношением

$$dA = -dU, \quad \text{или} \quad dA = -dE_{II}, \quad (3.6.1)$$

которое показывает, что положительное приращение работы совершается за счет убыли потенциальной энергии. Тогда работа потенциального поля равна разности потенциальных энергий в начальном и конечном положениях системы

$$A_{12} = U_1 - U_2 = E_{1II} - E_{2II}. \quad (3.6.2)$$

Потенциальная энергия материального тела (точки), находящегося в потенциальном поле, зависит от ее положения и является аддитивной и непрерывной функцией координат точки:

$$E_{II} = E_{II}(\vec{r}) = E_{II}(x, y, Z), \quad E_{II} = E_{II}(\vec{r}) = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C, \quad (3.6.3)$$

здесь  $C$  – постоянная, зависящая от выбора начала отсчета потенциальной энергии, обычно принимается  $C = 0$ .

Из этого следует, что сила

$$\vec{F} = -\text{grad}E_{II} = -\nabla E_{II} = -\left( \vec{i} \frac{\partial E_{II}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial E_{II}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial E_{II}}{\partial z} \right). \quad (3.6.4)$$

Консервативная сила равна и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z}, \quad \vec{F} = -\text{grad}E_{\Pi}.$$

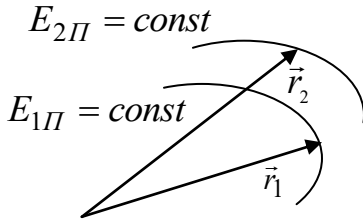


Рис. 3.6.1

Поверхность, которая удовлетворяет условию постоянства потенциальной энергии  $E_{\Pi} = E_{\Pi}(\vec{r}) = E_{\Pi}(x, y, z) = \text{const}$ , называется эквипотенциальной. При перемещении материальной точки по этой поверхности работа поля равна нулю, т. к.  $\Delta E_{\Pi} = 0$  (см. рис. 3.6.1).

*Примеры вычисления потенциальной энергии*

1. Поле силы тяжести. В соответствии с (3.6.1), (3.6.2)

$$E_{\Pi} = mgz, \quad E_{0\Pi} = 0 \text{ при } Z = 0,$$

$$A_{12} = E_{1\Pi} - E_{2\Pi} = \Delta E_{\Pi} = mg(Z_1 - Z_2).$$

2. Гравитационное поле

$$E_{\Pi} = -GMm\frac{1}{r}, \quad E_{\Pi} = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

3. Поле упругих сил

$$F_x = -cx, \quad E_{\Pi} = \frac{1}{2}cx^2. \quad (3.6.5)$$

### 3.7. Закон изменения и сохранения механической энергии

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек. В соответствии с законом изменения кинетической энергии для некоторой точки  $k$  справедливо уравнение

$$E_{k2\text{КИН}} - E_{k1\text{КИН}} = A_{k12} = A_{k12}^{\text{Конс}} + A_{k12}^{\text{Неконс}}. \quad (3.7.1)$$

Суммируя эти уравнения по всем точкам системы, получим

$$\sum_1^k E_{k2\text{КИН}} - \sum_1^k E_{k1\text{КИН}} = \sum_1^k A_{k12}^{\text{Конс}} + \sum_1^k A_{k12}^{\text{Неконс}} \quad (3.7.2)$$

или

$$E_{2K} - E_{1K} = A_{12}^{Конс} + A_{12}^{Неконс}, \quad (3.7.3)$$

здесь  $E_{1K}$ ,  $E_{2K}$  – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;  $A_{12}^{Конс}$ ,  $A_{12}^{Неконс}$  – сумма работ всех консервативных и неконсервативных сил, действующих на систему.

Полная механическая энергия системы есть сумма ее кинетической и потенциальной энергий:  $E = E_K + E_{II}$ ,  $E_1 = E_{1K} + E_{1II}$ ,  $E_2 = E_{2K} + E_{2II}$ .

Работа консервативных сил может быть вычислена с помощью потенциальной энергии

$$A_{12}^{Конс} = U_1 - U_2 = E_{1II} - E_{2II}. \quad (3.7.4)$$

Подставляя (3.7.4) в (3.7.3), получим

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{Неконс}, \quad \Delta E = A_{12}^{Неконс}, \quad (3.7.5)$$

что является выражением закона изменения полной механической энергии: *изменение полной механической энергии материальной системы на некотором ее пути равно работе всех неконсервативных сил, действующих на систему на этом пути.*

Неконсервативные силы: силы трения, силы тяги, ударные силы, электромагнитные силы и др.

Рассмотрим консервативную механическую систему. Для нее работа неконсервативных сил  $A_{12}^{Неконс} = 0$ , и тогда из (3.7.5) следует  $E_2 = E_1$  или

$$E = E_K + E_{II} = const, \quad (3.7.6)$$

закон сохранения механической энергии: *полная механическая энергия консервативной системы не изменяется.*

В диссипативных системах полная механическая энергия не сохраняется, поскольку она рассеивается в окружающую среду, расходуясь на совершение работы против сил сопротивления и переходя в другие виды энергии.

Если механическая система – машина, то для ее устойчивой работы необходимо восполнение потерь механической энергии, затрачиваемых на работу против сил сопротивления, за счет внешнего источника энергии.

### 3.8. Момент силы

Момент  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно некоторой точки  $O$  есть векторная физическая величина, определяемая в виде векторного произведения радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из т.  $O$  в т.  $A$  приложения силы, на силу

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3.8.1)$$

Модуль момента (см. рис. 3.8.1)

$$M = Fr \sin \alpha = Fh, \quad (3.8.2)$$

здесь  $h = r \sin \alpha$  – плечо силы относительно т.  $O$ , т. е. перпендикуляр, опущенный из т.  $O$  на линию действия силы;  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

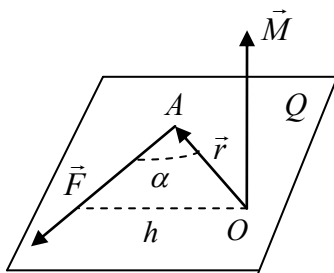


Рис. 3.8.1

Направление вектора  $\vec{M}$  определяется согласно правилу векторного произведения или правилу правого винта.

Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно плоскости  $Q$ , в которой лежат векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , в том направлении, откуда вращение, которое стремится создать сила, происходит против часовой стрелки, если смотреть навстречу вектору  $\vec{M}$ .

Момент силы характеризует интенсивность вращательного действия, оказываемого силой на тело, к которому она приложена.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной оси  $Z$  определяется в виде

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_1 h, \quad (3.8.3)$$

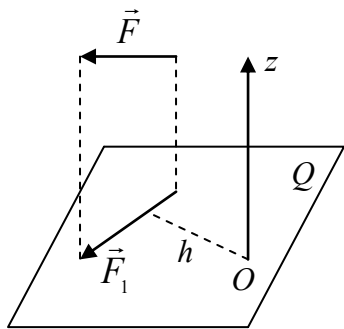


Рис. 3.8.2

здесь  $F_1$  – проекция силы  $\vec{F}$  на плоскость  $Q$ , перпендикулярную оси  $Z$ ,  $h$  плечо силы  $F_1$  относительно т.  $O$  пересечения оси  $Z$  с плоскостью  $Q$  (см. рис. 3.8.2).

Момент  $M_z(\vec{F})$  положителен, если он действует против часовой стрелки, и отрицателен, если он действует по часовой стрелке. Если рассматривается вращательное движение тела, момент  $M_z(\vec{F}) > 0$ , если он действует по направлению вращения тела, и  $M_z(\vec{F}) < 0$  – если против.

Момент  $M_z(\vec{F}) > 0$ , если он действует по направлению вращения тела, и  $M_z(\vec{F}) < 0$  – если против.

### 3.9. Момент импульса

Момент  $\vec{L}$  импульса  $\vec{p}$  материальной точки относительно некоторой т.  $O$  определяется в виде векторного произведения

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (3.9.1)$$

здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки относительно т.  $O$ ;  $\vec{p} = m\vec{v}$  импульс материальной точки (см. рис. 3.9.1). Модуль момента импульса

$$L = pr \sin \alpha = ph, \quad h = r \sin \alpha, \quad (3.9.2)$$

здесь  $h$  плечо момента импульса относительно точки  $O$ . Направление вектора  $\vec{L}$  определяется по правилу векторного произведения аналогично правилам определения направления вектора момента силы (см. рис. 3.9.2).

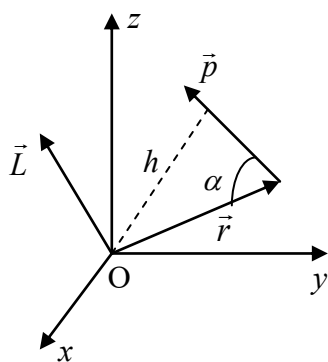


Рис. 3.9.1

аналогично правилам определения направления вектора момента силы (см. рис. 3.9.2).

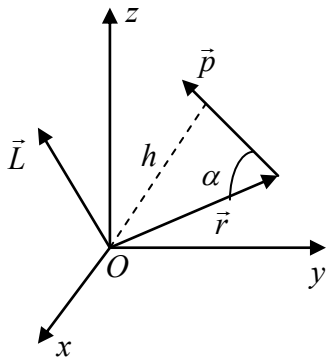


Рис. 3.9.2

Момент импульса  $\vec{L}$  механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, равен геометрической сумме моментов импульсов  $\vec{L}_k$  всех материальных точек системы относительно некоторой т.  $O$

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^n \vec{L}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k). \quad (3.9.3)$$

Момент импульса материальной точки относительно оси  $Z$   $L_z = \pm p_{xy} \cdot h_z$ , здесь  $p_{xy}$  есть проекция вектора  $\vec{p}$  на плоскость  $Oxyz$ .

Момент импульса механической системы относительно некоторой т.  $O$  равен сумме моментов импульсов всех материальных точек системы относительно этой точки

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^n \vec{L}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{p}_k).$$

### 3.10. Закон изменения и сохранения момента импульса

Уравнение движения материальной точки запишем в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \quad (3.10.1)$$

и определим момент силы  $\vec{F}$  относительно некоторого центра  $O$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Это выражение можно преобразовать

$$\vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}.$$

Учитывая, что  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ , поскольку  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ , т. к. угол между перемножаемыми векторами  $\alpha = 0$  (векторный квадрат), получим закон изменения момента импульса для материальной точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k, \quad (3.10.2)$$

*производная по времени момента импульса материальной точки относительно некоторого центра  $O$  равна геометрической сумме моментов  $\vec{M}_k$  всех сил, действующих на точку, относительно этого же центра.*

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  материальных точек. Для каждой материальной точки, находящейся под действием внешних и внутренних сил, уравнение (3.10.2) запишется в виде

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{M}_k + \vec{M}_k^i, \quad (3.10.3)$$

здесь  $\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k$  есть момент внешних сил, приложенных к  $k$ -й точке системы, относительно центра  $O$ ;  $\vec{M}_k^i = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i$ , – момент внутренних сил, действующих на эту точку, относительно центра  $O$ .

Сумма моментов всех внутренних сил, действующих на систему, относительно центра  $O$  равна нулю в соответствии с третьим законом Ньютона, поскольку внутренние силы существуют попарно и их моменты уравновешиваются.

Суммируя эти уравнения по всем точкам системы

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{L}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k + \sum_{k=1}^n \vec{M}_k^i, \quad (3.10.4)$$

и изменяя порядок суммирования и дифференцирования, получим закон изменения момента импульса механической системы



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3.10.5)$$

здесь  $\vec{L} = \sum_{k=1}^n \vec{L}_k$  есть момент импульса системы относительно некоторого центра  $O$ ;  $\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k$ , сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра  $O$ ;  $\vec{M}^i = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k^i = 0$ , сумма моментов всех внутренних сил системы относительно центра  $O$ .

В проекциях на оси координат закон (3.10.5) запишется в виде трех алгебраических уравнений:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (3.10.6)$$

*Закон изменения момента импульса механической системы относительно некоторой оси: производная по времени момента импульса механической системы относительно некоторой оси равна геометрической сумме моментов всех внешних сил системы относительно этой же оси:*

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Если механическая система является замкнутой, сумма моментов внешних сил равна нулю и производная момента импульса по времени также обращается в ноль. Это возможно, если момент импульса системы не изменяется; получаем

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^n \vec{L}_k = \text{const} \quad (3.10.7)$$

или  $\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k v_k) = \text{const}$ , закон сохранения момен-

та импульса: *момент импульса замкнутой механической системы*

не изменяется во времени, сохраняя постоянную величину и направление.

Относительно осей координат закон запишется в виде

$$L_x = \sum_{k=1}^n L_{kx} = \text{const}, \quad L_y = \sum_{k=1}^n L_{ky} = \text{const},$$

$$L_z = \sum_{k=1}^n L_{kz} = \text{const}. \quad (3.10.8)$$

### 3.11. Элементы динамики твёрдого тела. Момент инерции

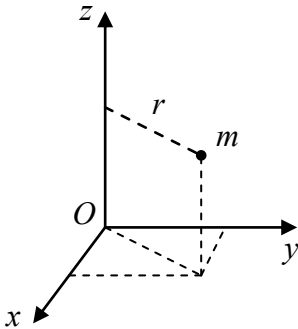


Рис. 3.11.1

Момент инерции  $I_z$  материальной точки относительно оси  $Z$  равен произведению массы точки  $m$  на квадрат ее расстояния до этой оси (см. рис. 3.11.1):

$$I_z = mr^2. \quad (3.11.1)$$

Момент инерции механической системы относительно некоторой оси  $Z$  есть скалярная величина, равная сумме произведений масс  $m_k$  всех  $n$  точек системы на квадраты их расстояний  $r_{kz}$  до этой оси (см. рис. 3.11.2):

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_{kz}^2. \quad (3.11.2)$$

Твердое тело является механической системой с непрерывным распределением массы, т. е. материальных точек. Поэтому, при  $n \rightarrow \infty$  сумма в (3.11.2) преобразуется в интеграл, взятый по всей области тела  $G$ :

$$I_z = \int_G r_z^2 dm = \int_G (x^2 + y^2) dm. \quad (3.11.3)$$

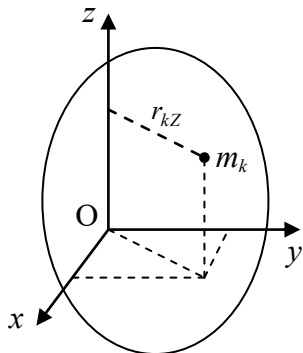


Рис. 3.11.2

Момент инерции твердого тела относительно данной оси характеризует распределение массы тела относительно данной оси, является мерой инертности тела относительно данной оси.

При вычислении моментов инерции твердого тела относительно параллельных осей применяется теорема Гюйгенса – Штейнера:

$$I_{z_1} = I_{CZ} + md^2, \quad (3.11.4)$$

момент инерции твердого тела относительно оси  $Z_1$  параллельной центральной оси  $CZ$  равен сумме момента инерции тела относительно оси  $CZ$  и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между этими осями.

### 3.12. Момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела во вращательном движении

Определим момент импульса твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega$ :

$$L_Z = \sum_{k=1}^N L_{kz} = \sum_{k=1}^N p_k h_{kz} = \sum_{k=1}^N m_k v_k r_k, \quad (3.12.1)$$

здесь  $p_k = m_k v_k$  есть импульс материальной точки тела,  $v_k = \omega r_k$  – скорость точки;  $h_{kz} = r_k$  – плечо импульса относительно оси.

Получаем

$$L_Z = \sum_{k=1}^N m_k \omega r_k^2 = \omega \sum_{k=1}^N m_k r_k^2, \quad L_Z = I_Z \omega, \quad (3.12.2)$$

момент импульса твердого тела относительно оси вращения  $Z$  равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно этой оси:

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 r_k^2 = \frac{1}{2} I_Z \omega^2, \quad E_K = \frac{1}{2} I_Z \omega^2. \quad (3.12.3)$$

### 3.13. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси, применяя закон изменения момента импульса (3.10.5), (3.10.6):

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z. \quad (3.13.1)$$

Подставляя в это уравнение момент импульса тела (3.12.1), получим

$$\frac{d(I_Z \omega)}{dt} = M_Z, \quad I_Z \frac{d\omega}{dt} = M_Z. \quad (3.13.2)$$

С учетом того, что  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_Z = \varepsilon = \ddot{\phi}$  есть угловое ускорение тела, уравнение примет вид

$$I_Z \varepsilon = M_Z, \quad (3.13.3)$$

что является основным уравнением вращательного движения твердого тела: *произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на его угловое ускорение равно сумме моментов внешних сил, действующих на тело, относительно этой оси.* Его можно записать также в виде дифференциального уравнения второго порядка:

$$I_Z \ddot{\phi} = M_Z, \quad M_Z = \sum_{k=1}^n M_{Zk}. \quad (3.13.4)$$

Уравнение (3.13.3) называют также вторым законом Ньютона для вращательного движения, поскольку по физическому смыслу оно соответствует второму закону  $ma = F$ .

Если механическая система является замкнутой,  $M_Z = 0$ , и из (3.13.1), (3.13.2) следует

$$I_Z \omega = \text{const}, \quad L_Z = \text{const}, \quad (3.13.5)$$

что выражает собой закон сохранения момента импульса твёрдого тела или механической системы во вращательном движении вокруг неподвижной оси.

Момент импульса замкнутой механической системы относительно оси вращения не изменяется, т. е. сохраняется по величине и направлению.

### 3.14. Работа и мощность вращающего момента.

#### Закон изменения энергии во вращательном движении твёрдого тела

Элементарная работа силы, действующей на тело, которое совершает вращательное движение, выражается в виде элементарной работы момента этой силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fds = Frd\phi = M_Z d\phi, \quad (3.14.1)$$

здесь  $M_Z = Fr$ , момент силы относительно оси вращения;  $ds = rd\phi$ , элемент дуги окружности.

Работа момента  $M_Z$

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 M_Z d\phi. \quad (3.14.2)$$

Работа, совершаемая моментом внешних сил, действующих на тело, определяется на угловом перемещении тела  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ , которое соответствует начальному 1 и конечному 2 положениям тела.

Мощность момента  $M_Z$

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M \cdot d\phi}{dt} = M \cdot \omega, \quad (3.14.3)$$

определяется в виде произведения момента на угловую скорость тела.

Если  $M_Z = const$ , то работа момента

$$A = \int_1^2 M_Z d\phi = M_Z(\phi_2 - \phi_1) = M_Z \Delta\phi. \quad (3.14.4)$$

Закон изменения кинетической энергии механической системы (твёрдого тела), вращающейся вокруг неподвижной оси под действием вращающего момента  $M_Z$ , с учетом (3.12.3) примет вид

$$\frac{1}{2} I_Z \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_Z \omega_1^2 = \int_1^2 M_Z d\phi. \quad (3.14.5)$$

В дифференциальной форме закон изменения кинетической энергии

$$d\left(\frac{1}{2} I_Z \omega^2\right) = M_Z d\phi \quad \text{или} \quad dE_K = dA. \quad (3.14.4)$$

## Глава 4. Основы релятивистской механики

### 4.1. Принцип относительности Эйнштейна

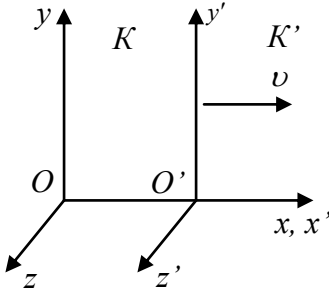


Рис. 4.1.1

Системы, в которых тела в отсутствии внешних сил движутся с постоянной скоростью, называются инерциальными. Любая другая система, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, тоже инерциальная. Таким образом, существует бесконечное множество инерциальных систем и попытка выбрать *главную* (эфир) закончилась неудачей.

Элементарная логика подсказывает, что раз системы равноправны, законы природы в них выполняются одинаково. Если рассмотреть две инерциальные системы  $K$  и  $K'$ , где  $K'$  движется относительно  $K$  вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$  (см. рис. 4.1.1), то координаты любой материальной точки в этих системах связаны между собой *преобразованиями Галилея*:

$$x = x' + vt; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (4.1.1)$$

Последнее равенство означает, что время в обеих системах течет одинаково. Преобразования Галилея дают равенство ускорений материальной точки в обеих системах  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} = a'_x$ ;  $a_y = a'_y$ ,  $a_z = a'_z$ .

Из равенства ускорений вытекает равенство сил  $F = ma$ , работы  $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$ , энергий и т. д. Т.е. все основные физические величины в обеих системах одинаковы.

Преобразования Галилея, в основе которых лежало представление об абсолютном пространстве и независимом времени, приводят к выводу, что уравнения движения тел *инвариантны* (одинаковы) по отношению к преобразованиям координат.

В классической механике взаимодействие тел на расстоянии (через силовые поля) описывалось потенциальной энергией  $U = U(x, y, z)$ , которая является только функцией координат. Это означает, что изменение состояния одного тела *мгновенно* передается другому. Однако опыт показывает, что мгновенных взаимодействий не существует, а изменения передаются с некоторой конечной скоростью (скоростью сигнала). И сразу встает вопрос о максимальной скорости распространения взаимодействий. До XVII века считалось, что мгновенно распространяется свет. Однако опыты Рёмера по изучению движения спутника Юпитера позволили в 1676 году провести первое измерение скорости света.

Скорость света в вакууме, измеренная Рёмером  $c = 214\,300$  км/с. В настоящее время, в связи с введением нового высокоточного эталона времени, скорость света в вакууме принята  $c = 299\,792\,458$  м/с.

В конце XIX века опыты Майкельсона и Морли показали, что скорость распространения электромагнитных волн не зависит от их частоты и интенсивности. А опыт Бертоцци показал, что нельзя ускорить частицу (электрон) до скорости, превышающей  $c$ . В опыте Бертоцци электроны ускорялись все более сильными полями в ускорителе Ван-дер-Граафа, а затем измерялась их кинетическая энергия, переходящая в тепло при ударе. Все опыты привели к выводу: скорость света является предельной *скоростью переноса информации, веществ и взаимодействий*.

Принцип относительности Эйнштейна представляет собой фундаментальный физический закон, основанный на двух постулатах:

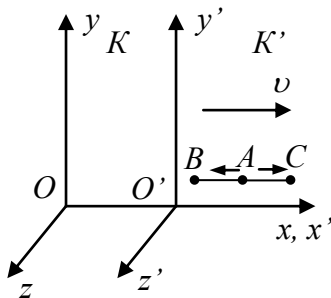


Рис. 4.1.2

- законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета;

- скорость света постоянна во всех системах и не зависит от движения источника и наблюдателя.

Принцип относительности отвергает независимость времени, что можно проследить на простом



примере (см. рис. 4.1.2) тех же двух инерциальных систем  $K$  и  $K'$ . Опыт состоит в том, что в системе  $K'$  сигнал отправляется из точки  $A$  в точки  $B$  и  $C$  с одной и той же скоростью  $c$  (вспышка света). Расстояния  $AB$  и  $AC$  одинаковы и для наблюдателя в системе  $K'$  сигнал придет в эти точки одновременно. Для наблюдателя в системе  $K$  точка  $B$  движется навстречу сигналу, а точка  $C$  – от сигнала, поэтому сигнал в точку  $B$  придет раньше. То есть события одновременные в одной системе, будут не одновременными в другой. Поэтому время течет в каждой системе по своему (является относительным).

## 4.2. Преобразование Лоренца для координат и времени

В классической механике пространство и время считались независимыми друг от друга, поэтому расстояние между точками в пространстве и промежуток времени между событиями принимались одинаковыми во всех системах отсчета, т. е. были инвариантными (независимыми):

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t' = t'_2 - t'_1 = inv \\ \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = inv^2. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Вид инварианта связан с тем, что в обычном пространстве, описываемом евклидовой геометрией  $\Delta S^2 = 0$ , т. к.  $c^2 \Delta t^2 = \Delta r^2$  и в системе  $K'$   $\Delta S'^2 = 0$ , т. к.  $c^2 \Delta t'^2 = \Delta r'^2$ . То есть  $\Delta S = \Delta S' = inv$ .

В теории относительности время в каждой системе течет по своему, поэтому для каждой системы появляется еще одно измерение (временная ось) и пространство становится 4-мерным. Для такого пространства-времени вместо двух инвариантов вводится один, имеющий вид

$$\Delta S^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - \Delta r^2 = inv. \quad (4.2.2)$$

$$\text{В системе } K \quad \Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

$$\text{В системе } K' \quad \Delta S'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2.$$

$$c = inv \quad (\text{одинакова в } K \text{ и } K').$$

То есть инвариантность  $\Delta S$ , названного *интервалом* между точками четырех мерного пространства-времени есть выражение инвариантности скорости света.

В обычной евклидовой геометрии допускается многомерное пространство и квадратичная форма  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \xi^2$  описывает сферическую поверхность в 4-мерном пространстве. Квадратичная форма  $S^2 = \tau^2 - x^2 - y^2 - z^2$  описывает гиперболическую поверхность.

Формулы преобразования координат и времени от одной инерциальной системы к другой должны составлять неизменными длины в 4-мерном пространстве (интервалы). В обычной геометрии такими преобразованиями являются параллельный перенос (смена положения начала координат) и поворот. В 3-мерном пространстве любой поворот можно разложить на 3 поворота в плоскостях  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ . В 4-мерном пространстве поворот можно разложить на 6 поворотов в плоскостях  $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ ,  $xct$ ,  $yct$ ,  $zct$ .

Рассмотрим поворот в плоскости  $xct$ . При этом  $y = y' y$  и  $z = z'$ , т. е. поворот в плоскости  $xct$  соответствует в 3-мерном пространстве движению  $K'$  вдоль оси  $x$ , как на рис. 4.1.2.

Связь координат при этом запишется в виде

$$\begin{cases} x = x'ch\phi + ct'sh\phi \\ ct = x'sh\phi + ct'ch\phi \end{cases} \quad (4.2.3)$$

где  $sh\phi$  и  $ch\phi$  гиперболические синус и косинус. Если для евклидовой геометрии  $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$  (теорема Пифагора), то для нашего гиперболического пространства

$$ch^2\phi - sh^2\phi = 1, \quad sh\phi = \frac{th\phi}{\sqrt{1-th^2\phi}}, \quad ch\phi = \frac{1}{\sqrt{1-th^2\phi}}. \quad (4.2.4)$$

Рассмотрим из рис. 4.1.2 движение в  $K'$  начала координат  $K'$ . При этом  $x' = 0$  и (4.2.3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} x = ct'sh\phi \\ ct = ct'ch\phi \end{cases}$$

Разделив эти уравнения одно, на другое получаем

$$\frac{x}{ct} = \frac{sh\phi}{ch\phi} = th\phi, \text{ а так как } \frac{x}{t} = v, \text{ th}\phi = \frac{v}{c}.$$

Из (4.2.4) определяем  $sh\phi$  и  $ch\phi$  и подставляем их в (4.2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{ct' \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ ct = \frac{x' \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{ct'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

Таким образом, получены преобразования координат и времени из одной инерциальной системы в другую:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \frac{ct' + x' \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.2.6)$$

Это и есть преобразования Лоренца для координат и времени.

Иногда формулы преобразования Лоренца записывают для времени  $t$ , а не для временной координаты  $ct$ :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Переход к классической механике осуществляется при  $c \rightarrow \infty$ , тогда получаем формулы преобразования Галилея (4.1.1).

### 4.3. Следствия из преобразований Лоренца

1. Пусть в системе  $K$  покоится линейка, параллельная оси  $x$ . Ее длина  $l_0 = x_2 - x_1$ . Найдем длину линейки в системе  $K'$ .  $l_0 = x'_2 - x'_1$ . Из преобразований Лоренца

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x'_1 - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

получим

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ или } l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.3.1)$$

этот результат называется Лоренцево сокращение длины.

Если  $l_0 = 1$  м и система  $K'$  движется со скоростью  $v = 0,6$  с получим:  $l = 1\sqrt{1 - 0,36} = 0,8$  м.

Поскольку поперечные размеры тела не меняются, получаем формулу для Лоренцева сокращения объема  $V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

2. Пусть в системе  $K'$  покоятся часы, которые фиксируют промежуток времени между событиями  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Найдем промежуток времени между этими событиями в системе  $K$ .  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Из (4.2.6)

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 - \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  – собственное время системы; это означает,

что в движущейся системе время идет медленнее.

Если  $\Delta t = 100$  лет – время на Земле, то в корабле, летящем со скоростью  $v = 0,6 c$  пройдет:  $\Delta t' = 100\sqrt{1-0,36} = 80$  л. Чем больше скорость  $v$  приближается к  $C$ , тем больше замедление времени.

3. При движении материальной точки ее скорость

$$\begin{cases} \text{в системе } K \quad v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \\ \text{в системе } K' \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, v'_y = \frac{dy'}{dt'}, v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Из преобразований Лоренца

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' - \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.3.3)$$

Подставляя (4.3.3) в (4.3.2) получим соотношение между скоростями

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v v'_x}{c^2}}. \quad (4.3.4)$$

Это и есть закон преобразования скоростей. Закон преобразования скорости показывает, что в природе не может быть скорости, большей  $c$ . Например  $K'$  (корабль) движется относительно  $K$  (Земли) со скоростью  $0,8 c$ . Корабль пускает по ходу движения зонд со скоростью  $0,5 c$ .

Скорость зонда относительно Земли из классической механики:  $v_x = v'_x + v = 1,3c$ , из теории относительности

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}} = 0,9c.$$

#### 4.4. Релятивистская механика

Уравнения механики Ньютона не являются инвариантными относительно преобразований Лоренца и не учитывают движения тел со скоростью, близкой к скорости света. Поэтому динамика теории относительности может быть построена независимо от классической, но используя те же приемы построения: изменение вектора перемещения во времени дает скорость, изменение скорости – ускорение и т. д. Поэтому в 4-мерном пространстве вводятся 4-мерные векторы имеющие 3 пространственные компоненты и 1 временную. Запись 4-мерного вектора  $\{a_\tau, \vec{a}\}$ , где  $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$  – пространственная компонента вектора,  $a_\tau$  – временная. Совокупность компонент  $a_x, a_y, a_z, a_\tau$  при переходе из одной системы координат в другую преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца:

$$a_x = \frac{a'_x + \beta a'_\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}; a_y = a'_y; a_z = a'_z; a_\tau = \frac{a'_\tau + \beta a'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.4.1)$$

здесь  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Из тождественности законов преобразования Лоренца следует, что 4-мерный вектор  $\{a_\tau, \vec{a}\}$ , обладает инвариантом

$$a_\tau^2 - |\vec{a}|^2 = \text{inv}. \quad (4.4.2)$$

Построим 4-мерный вектор, умножив вектор интервала  $\{cdt, d\vec{r}\}$  на  $m_0$  (массу частицы в системе, где частица покоится) и разделив на  $dt'$  – собственное время этой системы.

Получится вектор

$$\left\{ \frac{m_0 c^2}{c} \frac{dt}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m_0 d\vec{r}}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}.$$

Введем обозначения

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}; \quad \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{p}, \quad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E. \quad (4.4.3)$$

Тогда вектор преобразуется к виду

$$\left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\}, \quad (4.4.4)$$

$\frac{E}{c}$  – временная компонента вектора;  $\vec{p}$  – пространственная.

В данном случае инвариант такого вектора из (4.4.2):

$$\left( \frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = \text{inv}. \text{ Полученный } \text{inv} \text{ показывает, что } m_0 \text{ – является}$$

инвариантом, т. к.  $c$  – уже инвариант. То есть  $m_0$  – одинакова для всех инерциальных систем.

Можно найти этот инвариант, используя обозначения (4.4.3):

$$\text{inv} = \frac{m_0^2 c^4}{c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} - \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (m_0 c)^2. \quad (4.4.5)$$

Если назвать  $\vec{p}$  – импульсом частицы, то можно ввести понятие силы, действующей на частицу  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  и понятие работы

$$\text{этой силы } dA = (\vec{F}, d\vec{r}). \text{ Для работы получаем } dA = \left( \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} \right) = (d\vec{p}, \vec{v}).$$

Из выражения для инварианта имеем  $p^2 = \left( \frac{E}{c} \right)^2 + \text{inv}$ , что дает для  $dp$  значение  $dp = \frac{dE}{v}$ , а работа получается в виде:

$dA = dE$ . Если считать, что работа, совершенная некоторой силой численно равна приращению энергии тела (точки), то  $E$  – ничто иное как энергия. Следовательно, временная компонента полу-

ченного вектора – это энергия, деленная на  $c$ . Формула для энергии

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.4.6)$$

где  $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m$  – релятивистская масса.

Тогда энергия тела (точки) массой  $m$

$$E = mc^2. \quad (4.4.7)$$

Это самая важная формула теории относительности Эйнштейна, показывающая связь энергии и массы тела. По выражению Эйнштейна масса должна рассматриваться как «сосредоточение колоссального количества энергии».

Тогда в системе, где тело покоится, его энергия равна  $E_0 = m_0 c^2$ , которая называется энергией покоя. В этом случае меняется понятие кинетической энергии тела, которая равна

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (4.4.8)$$

Для кинетической энергии при  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$  при разложении

в ряд имеем  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$  и тогда  $T = \frac{m_0 v^2}{2}$  – обычное нер-

релятивистское выражение кинетической энергии.

Таким образом, 4-мерный вектор (4.4.4) есть вектор энергии – импульса и законы сохранения энергии и импульса перестают быть независимыми и объединяются в один закон сохранения 4-х мерного вектора энергии – импульса.



Из выражения для инварианта  $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2$ , получаем

связь энергии и импульса в виде

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (4.4.9)$$

Для фотонов – частиц, движущихся со скоростью света  $v = c$ , получаем  $m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$  и  $E = p \cdot c$ .

## **Задания для самостоятельной работы и задачи к главам 1–4**

### *Зачётные требования*

1. Кинематика точки: знание кинематических характеристик точки, вращательного движения тела, уравнений кинематики равнопеременного движения точки и вращательного движения тела, взаимосвязи линейных и угловых параметров; умение применять уравнения кинематики в конкретных условиях задач и тестов.

2. Динамика точки и поступательного движения тела: знание законов и принципов классической механики, динамических характеристик материальной точки и поступательного движения твердого тела; знание законов, определяющих силы в различных механических взаимодействиях; умение применять законы и уравнения динамики точки в условиях конкретных задач, тестов.

3. Законы сохранения: знание законов изменения и сохранения импульса, момента импульса, энергии механической системы; знание энергетических характеристик (работа силы, кинетическая и потенциальная энергия, мощность); умение применять законы сохранения в условиях конкретных задач.

4. Динамика вращательного движения твердого тела: знание уравнения динамики вращательного движения тела, динамических характеристик; умение применять основное уравнение динамики вращательного движения тела в условиях конкретных задач, тестов.

5. Основы специальной теории относительности: знание постулатов СТО, основного закона динамики материальной точ-

ки в теории относительности, закона эквивалентности массы и энергии.

### *Зачётные задания*

Выполнить задания данные ниже в соответствии со своим вариантом.

#### *Задача 1.*

Материальная точка движется по закону  $\vec{r} = \vec{i}At^l + \vec{j}Bt^m + \vec{k}Ct^n$ .

1. Найти скорость и ускорение точки в момент времени  $t_2$ , перемещение точки за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ , среднюю скорость за это же время.

2. Найти касательное и нормальное ускорение точки в момент времени  $t_2$ . Значения параметров приведены в табл. 4.5.1

*Таблица 4.5.1*

<i>№ варианта</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>t1</i>	<i>t2</i>
1	1	3	5	2	1	2	0,5	3
2	2	4	1	1	2	2	1	4
3	3	5	2	2	1	2	2	5
4	4	1	3	1	2	2	3	6
5	5	2	4	2	1	2	0,5	5
6	6	3	5	1	2	2	1	6
7	2	5	1	2	1	2	2	7
8	3	5	2	1	2	2	3	8
9	4	1	3	2	1	2	4	9
10	5	2	4	1	2	2	2	6
11	1	3	5	2	2	1	0,5	5
12	6	4	1	1	2	2	1	6
13	3	5	2	2	1	2	2	5
14	3	1	3	1	2	2	3	6
15	5	2	-4	2	1	2	0,5	7

#### *Задача 2.*

Тело массой  $m$  движется с ускорением  $a$  под действием силы  $F$  вверх по наклонной плоскости, угол наклона которой  $\alpha$ .

Коэффициент сопротивления движению  $K$ . При этом на пути  $S$  совершается работа  $A$ .

Используя табл. данных 4.5.2 согласно Вашему варианту, определите параметры, обозначенные в таблице знаком «?».

Таблица 4.5.2

№ варианта	$m$ тонны	$F$ кН	$\alpha$ град	$a$ м/с <sup>2</sup>	$K$	$S$ м	$A$ кДж
1	1	?	?	0.5	0,02	40	90
2	?	15	6	1	0,03	30	?
3	1.2	3	?	1	0,02	?	120
4	?	?	10	1	0,02	50	540
5	6	20.0	10	?	0,05	25	?
6	7	18	?	0.5	0,04	?	180
7	?	12	8	1.5	0,05	70	?
8	8	?	6	1	?	60	1150
9	?	10	12	0.5	0,03	140	?
10	4	9	?	1	0,04	?	2100

### Задача 3.

С наклонной плоскости высотой  $h$ , составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, соскальзывает с начальной скоростью равной нулю шайба массой  $m_1$ , после схода с наклонной плоскости, ударяющаяся абсолютно упруго неподвижную шайбу массой  $m_2$ , которая после удара проходит по горизонтальной поверхности путь  $S$ . При движении обеих шайб коэффициент трения одинаков и равен  $K$ .

Используя табл. данных 4.5.3, определите для своего варианта параметр обозначенный знаком «?».

Таблица 4.5.3

№ варианта	$h$ , м	$\alpha^\circ$	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$K$	$S$ , м
1	?	30	1	0,25	0,1	15
2	8	?	0,5	0,25	0,2	6
3	3	45	?	0,75	0,2	8
4	2	30	1	?	0,1	10

Окончание табл. 4.5.3

№ варианта	$h, м$	$\alpha^\circ$	$m_1, кг$	$m_2, кг$	$K$	$S, м$
5	2	45	0,2	0,3	?	4
6	1	60	0,2	0,35	0,2	?
7	?	45	0,8	0,2	0,3	21
8	4	?	0,8	0,4	0,2	16
9	2,5	30	?	1,5	0,1	7
10	1,5	60	0,8	?	0,3	9

## Задача 4.

Космический объект с массой покоя  $m_0$  движется со скоростью  $v$ , имея импульс  $P$  и кинетическую энергию  $T$ . Собственная длина объекта в направлении движения  $l_0$ , релятивистское изменение этой длины  $\Delta l$ .

Определите параметры, обозначенные для Вашего варианта знаком «?» в табл. 4.5.4

Таблица 4.5.4

№ варианта	$m_0, кг$	$v, Ммс$	$P, 10^{11} м/с$	$T, 10^{22} Дж$	$l_0, м$	$\Delta l, м$
1	1200	150	?	?	?	0,268
2	3000	?	?	1,08	3	?
3	?	180	4,32	?	?	1
4	1800	240	?	?	2	?
5	?	210	?	0,432	4	?
6	3000	?	5,196	?	?	0,402
7	?	240	9,6	?	4	?
8	1800	?	?	0,649	?	0,572
9	?	240	?	1,8	5	?
10	?	150	2,08	?	2	?

## Контрольные вопросы к главам 1–4

1. Система отсчёта. Координаты. Перемещение, путь, траектория, кинематические уравнения движения точки.
2. Скорость точки. Ускорение точки.
3. Вращательное движение тела. Скорость и ускорение точки тела.
4. Динамика материальной точки. Законы Ньютона. Уравнения динамики материальной точки.
5. Принципы классической механики: принцип независимости действия сил, принцип относительности Галилея.
6. Гравитационная сила. Сила тяжести, вес тела.
7. Силы трения и упругости.
8. Закон изменения и сохранения импульса материальной системы.
9. Момент силы относительно точки и оси.
10. Момент импульса материальной точки и системы.
11. Закон изменения и сохранения момента импульса.
12. Кинетическая энергия материальной точки и системы.
13. Работа силы (элементарная и на конечном перемещении точки).
14. Потенциальная энергия. Примеры.
15. Закон изменения и сохранения энергии материальной системы. Закон сохранения полной механической энергии.
16. Момент инерции твёрдого тела относительно оси. Теорема Гюйгенса – Штейнера.
17. Момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела во вращательном движении.
18. Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.
19. Преобразования Галилея. Принцип относительности классической механики.
20. Постулаты специальной теории относительности.
21. Преобразования Лоренца.
22. Следствия из преобразований Лоренца (одновременность событий, длительность события в разных ИСО, Лоренцево сокращение длины).

23. Основной закон релятивистской динамики материальной точки.

24. Закон взаимосвязи массы и энергии. Кинетическая и полная энергия тела.

### Список литературы

1. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики: для студентов техн. вузов. 3-е изд., испр. и доп. СПб.: Книжный мир, 2006. 327 с.

2. Иродов И. В. Задачи по общей физике: учеб. пособие. 8-е изд. М.: БИНОМ, 2007. 431 с.

3. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2008. 432 с.

4. Трофимова Т. И. Краткий курс физики с примерами решения задач: учеб. пособие. М.: Кнорус, 2010. 280 с.

5. Трофимова Т. И. Руководство к решению задач по физике: учеб. пособие для прикладного бакалавриата. 3-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2017. 265 с.

6. Трофимова Т. И., Фирсов А. В. Курс физики с примерами решения задач: учебник: в 2 т. М.: Кнорус, 2010.

7. Физика. Методические указания и контрольные задания / А. А. Воробьев [и др.]. М.: Высшая школа, 1987. 208 с.

8. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики: учебник: в 3 т. Т. 1. Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны. 12-е изд. СПб.: Лань, 2007. 480 с.

9. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Наука, 2005. 512 с.

## Глава 5. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

### 5.1. Законы идеального газа

*Молекулярная физика* – раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из огромного числа молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении. Поэтому в молекулярной физике используют усреднённые значения скорости и энергии молекул (частиц).

*Термодинамика* – раздел физики изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

*Термодинамическая система* – совокупность макроскопических тел взаимодействующих и обменивающихся энергией между собой и с другими телами (внешней средой).

*Термодинамические параметры (параметры состояния)* – физические величины характеризующие свойства термодинамической системы (температура, давление, объём).

*Термодинамическое равновесие* – состояние термодинамической системы, в которое она самопроизвольно приходит через достаточно большой промежуток времени в условиях изоляции от окружающей среды. В состоянии термодинамического равновесия параметры термодинамической системы со временем не изменяются.

*Температура* – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа. Понятие температуры применимо только к макроскопическим телам (системам). Нельзя говорить о температуре микрочастицы (молекулы).

В настоящее время используют две температурные шкалы: термодинамическую  $T$  (градуированную в кельвинах [K]), и международную практическую  $t$  (градуированную в градусах Цельсия [°C]). Термодинамическая температурная шкала определяется

по одной точке отсчета (реперной точке) 273,16 К, соответствующей тройной точке воды (температура при которой лёд, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии). Международная практическая шкала определяется по двум реперным точкам 0 и 100 °С, соответствующим температурам замерзания и кипения воды при давлении  $1,013 \times 10^5$  Па. Градус Цельсия равен Кельвину. Температуры, определяемые по этим шкалам, связаны соотношением  $T = 273,15 + t$ .

В молекулярно-кинетической теории (м. к. т.) пользуются физической моделью *идеального газа*, у которого пренебрегают объёмом молекул (по сравнению с объёмом сосуда), не учитывают силы взаимодействия между молекулами, полагают столкновения молекул между собой и со стенками сосуда абсолютно упругими.

*Закон Бойля – Мариотта*: для данной массы газа при постоянной температуре ( $m, T = const$ ) произведение давления газа на его объём есть величина постоянная:

$$pV = const. \quad (5.1.1)$$

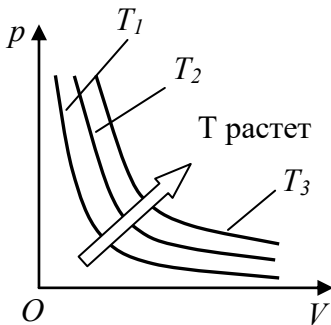


Рис. 5.1.1

Кривые, изображающие зависимость между  $p$  и  $V$  при  $T = const$ , называются *изотермами*, которые расположены тем выше, чем больше температура процесса (см. рис. 5.1.1).

*Законы Гей-Люссака*: 1) объём данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой (*изобарный процесс*):

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \alpha T, \text{ при } p = const, m = const; \quad (5.1.2)$$

2) давление данной массы газа при постоянном объёме изменяется линейно с температурой (*изохорный процесс*):

$$p = p_0(1 + \alpha t) = p_0 \alpha T, \text{ при } V = const, m = const; \quad (5.1.3)$$



здесь  $t$  – температура по шкале Цельсия,  $T$  – термодинамическая температура,  $V_0$  и  $p_0$  – объём и давление при  $0^\circ\text{C}$ , коэффициент  $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$ .

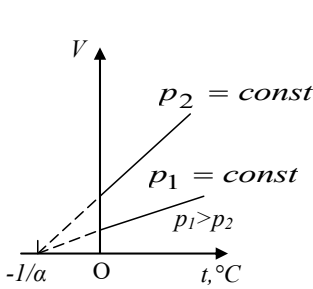


Рис. 5.1.2

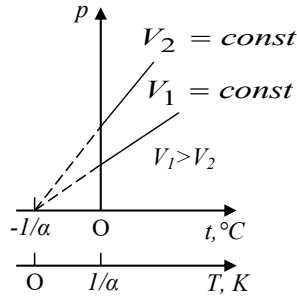


Рис. 5.1.3

Кривые, изображающие изобарный и изохорный процессы называются соответственно изобарами (см. рис. 5.1.2) и изохорами (см. рис. 5.1.3).

Из законов Гей-Люссака вытекают следующие отношения:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const},$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}, \quad (5.1.4)$$

здесь индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям.

Для измерения количества вещества используется моль – единица количества вещества в системе единиц СИ, в одном моле любого вещества содержится столько молекул (атомов, ионов или каких-либо других структурных элементов вещества), сколько атомов содержится в  $0,012 \text{ кг } ^{12}\text{C}$  (нуклида углерода атомной массой 12), это число называется постоянной (числом) Авогадро:  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

**Закон Авогадро:** моли любых газов при одинаковых температуре и давлении, занимают одинаковые объёмы.

При нормальных условиях ( $T = 273,15 \text{ K}$ ,  $p = 1,013 \times 10^5 \text{ Па}$ ) этот объём равен  $V_m = 22,41 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

*Закон Дальтона:* давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в неё газов:  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – парциальные давления – давления, которые оказывали бы газы смеси, если бы они одни занимали объём, равный объёму смеси при той же температуре.

## 5.2. Уравнение Клапейрона – Менделеева

Между параметрами состояния газа (давлением  $p$ , объёмом  $V$ , температурой  $T$ ) существует связь, называемая *уравнением состояния*. Это уравнение вывел Б. Клапейрон для данной массы газа:

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const}, \quad (5.2.1)$$

где  $B$  – газовая постоянная, различная для разных газов. Д. И. Менделеев отнёс это уравнение к одному молю, используя закон Авогадро:

$$\frac{pV_m}{T} = R \text{ или } pV_m = RT, \quad (5.2.2)$$

здесь  $V_m = 22,41 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$  – объём одного моля (молярный объём);  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \times \text{К})$  – молярная газовая постоянная.

Это уравнение называется *уравнением Клапейрона – Менделеева*, а также *уравнением состояния идеального газа*.

Для объёма произвольной массы газа можно записать

$$V = (m/M) \times V_m = \nu \times V_m,$$

где  $M$  – *молярная масса* (масса одного моля вещества);  $\nu = m/M$  – количество вещества. В этом случае уравнение Клапейрона – Менделеева для произвольной массы  $m$  газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT. \quad (5.2.3)$$

Существует ещё одна форма записи этого уравнения, с использованием постоянной Больцмана  $k = R/N_A = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$ :

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_A T}{V_m} = nkT, \quad (5.2.4)$$

здесь  $n = N_A/V_m$  – концентрация молекул (число молекул в единице объёма).

При одинаковых температуре и давлении все газы содержат одинаковое число молекул в единице объёма, так при нормальных условиях это число Лошмидта  $N_L = p_0/(kT_0) = 2,68 \times 10^{25} \text{ м}^{-3}$ .

### 5.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода уравнения мысленно выделим в объёме идеального одноатомного газа цилиндр с площадью основания  $\Delta S$  (см.

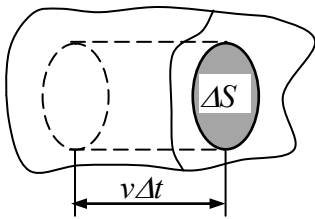


Рис. 5.3.1

рис. 5.3.1). Пренебрегая взаимными столкновениями молекул, столкновения со стенками сосуда будем считать абсолютно упругими. При этом одна молекула, двигаясь нормально к площадке  $\Delta S$  передаст ей импульс  $2m_0v$ , где  $m_0$  – масса молекулы;  $v$  – её скорость. Полагая, что к площадке  $\Delta S$  движется только 1/6

часть всех молекул, за время  $\Delta t$  число ударов о стенку будет  $(1/6)n\Delta Sv\Delta t$ . При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2 \cdot m_0 \cdot v \times (1/6) \cdot n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t = (1/3) nm_0 v^2 \Delta S \Delta t.$$

Тогда давление газа на стенку сосуда:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} nm_0 v^2. \quad (5.3.1)$$

Однако у разных молекул, в общем разные скорости хаотичного (теплого) движения, поэтому целесообразно ввести в формулу (5.3.1) *среднюю квадратичную скорость*:

$$\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}. \quad (5.3.2)$$

Это позволит в окончательном виде записать *основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов*:

$$p = \frac{1}{3} nm_0 \langle v_{KB} \rangle^2. \quad (5.3.3)$$

Учитывая, что  $n = N/V$ , и используя формулу для кинетической энергии поступательного движения одной молекулы, можно записать:

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{KB} \rangle^2 = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{KB} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \quad (5.3.4)$$

где  $E$  – суммарная кинетическая поступательного движения всех молекул газа. Далее, учитывая, что масса газа  $m = Nm_0$ , уравнение

(5.3.3) можно переписать:  $pV = \frac{1}{3} m \langle v_{KB} \rangle^2$ , или для одного моля:

$$pV_m = \frac{1}{3} M \langle v_{KB} \rangle^2.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением Клапейрона – Менделеева, получим:  $RT = \frac{1}{3} M \langle v_{KB} \rangle^2$ , откуда:

$$\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (5.3.5)$$

Используя формулы (5.3.4) и (5.3.5) можно записать формулу для кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа:

$$\langle \epsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{KB} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (5.3.6)$$

Из последней формулы видно, что при  $T = 0$  энергия молекулы  $\langle \epsilon_0 \rangle = 0$ , т. е. прекращается поступательное движение молекул, и давление газа должно быть равно нулю. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.

Абсолютный нуль температуры ( $T = 0$ ) – начало отсчёта термодинамической температуры, расположен на 273,16 К ниже температуры тройной точки воды (0,01 °С). Существование абсолютного нуля следует из второго начала термодинамики. С приближением температуры к абсолютному нулю стремятся к нулю

тепловые характеристики вещества: энтропия, теплоёмкость, и др. По представлениям классической физики, при абсолютном нуле энергия теплового движения молекул и атомов вещества равна нулю. Однако согласно квантовой механики и при абсолютном нуле атомы и молекулы совершают «нулевые» колебания и обладают «нулевой» энергией.

#### 5.4. Распределение молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения

Согласно молекулярно-кинетической теории средняя квадратичная скорость молекул в газе, находящемся в состоянии равновесия при  $T = const$ , остаётся постоянной и определяется формулой (5.3.5). При этом в газе устанавливается стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, подчиняющееся определённому статистическому закону, выведенное Дж. Максвеллом.

При выводе формулы предполагалось, что силовые поля на газ не действуют. Для газа, состоящего из  $N$  молекул массой  $m_0$  находящихся в состоянии хаотичного теплового движения, применяя методы теории вероятностей, Максвелл нашёл функцию  $f(v)$  – закон для распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / 2kT}. \quad (5.4.1)$$

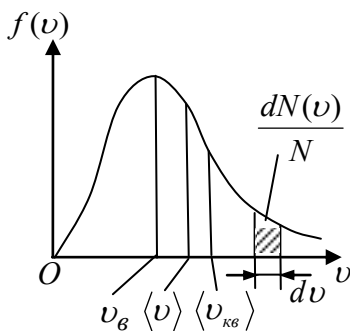


Рис. 5.4.1

График этой функции распределения Максвелла представлен на рис. 5.4.1. Кривая несимметрична относительно своего максимума  $v_B$  – наиболее вероятной скорости, значение которой может быть найдено дифференцированием функции по аргументу  $v$ , и приравниванием результата нулю:

$$\frac{d}{dv} \left( v^2 e^{-m_0 v^2 / 2kT} \right) = 2v \left( 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-m_0 v^2 / 2kT} = 0.$$

Значения  $v = 0$  и  $v = \infty$  соответствуют минимумам функции, а значение  $v$  при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость  $v_B$ :

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}. \quad (5.4.2)$$

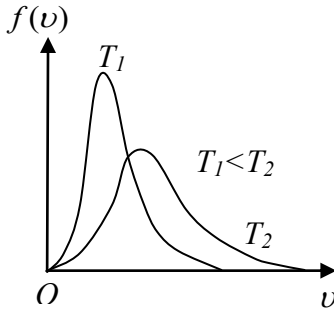


Рис. 5.4.2

Функция  $f(v)$  удовлетворяет ус-

ловию нормировки:  $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$

Т.е. площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс равна единице. Из формулы (5.4.2) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения сместится вправо ( $v_B$  увеличится), однако, площадь ограниченная кривой останется неизменной, кривая распределения (см. рис. 5.4.2) при этом будет растягиваться и понижаться.

Помимо средней квадратичной скорости  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  и наиболее вероятной скорости  $v_B$ , состояние газа характеризуется и средней

(средней арифметической) скоростью  $\langle v \rangle$ :  $E = \frac{1}{2} \pi \epsilon_0 r$ .

После подстановки  $f(v)$  и интегрирования получим:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}. \quad (5.4.3)$$

Из формулы (5.4.1) распределения молекул по скоростям, используя выражение для кинетической энергии молекулы:

$$\epsilon = \frac{m_0 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2\epsilon/m_0},$$

можно получить функцию распределения молекул по энергиям теплового движения:  $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)}$ .

Отсюда следует средняя кинетическая энергия  $\langle \varepsilon \rangle$  молекулы идеального газа:

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/(kT)} d\varepsilon = \frac{3}{2} kT.$$

Результат совпадает с (5.3.6).

### 5.5. Барометрическая формула

На молекулы любого газа действует с одной стороны, потенциальное поле тяготения Земли, и тепловое движение молекул –

с другой, что приводит к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа (атмосферное давление) с высотой убывает. Полагая поле тяготения однородным, температуру постоянной, массу всех молекул одинаковой, выведем барометрическую формулу. Пусть атмосферное давление на высоте  $h$  равно  $p$ , а на высоте  $h + dh$  равно  $p + dp$  (см. рис. 5.5.1), тогда с изменением высоты на  $dh$ , давление изменится на  $dp$ . Причём  $dp$  будет равно весу газа в объёме цилиндра высотой  $dh$  с основанием единичной площади ( $dh$  так мало, что позволяет считать в этом пределе плотность газа постоянной  $\rho = const$ ):

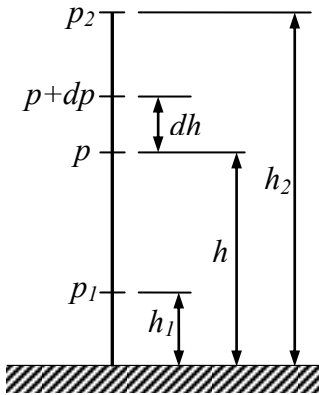


Рис. 5.5.1

$$dp = -\rho g dh. \quad (5.5.1)$$

Используя уравнение состояния идеального газа (5.2.2), выразим плотность газа:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставим это выражение в (5.5.1), и после разделения переменных интегрируем:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh, \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT} (h_2 - h_1).$$

Отсюда

$$p_2 = p_1 e^{-Mg(h_2-h_1)/(RT)}. \quad (5.5.2)$$

Выражение (5.5.2) называется *барометрической формулой*. Высоты обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным, тогда

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}. \quad (5.5.3)$$

Уровень моря – положение свободной поверхности Мирового океана, измеряемое по отвесной линии относительно некоторого условного начала отсчёта. В России и большинстве других стран бывшего СССР, а также в Польше, высоты отсчитывают от среднелетнего уровня Балтийского моря в Кронштадте.

Барометрическую формулу преобразуем, используя (5.2.4)  $p = nkT$ :

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)},$$

где  $n$  – концентрация молекул на высоте  $h$ ,  $n_0$  – то же на высоте  $h = 0$ . Если учесть, что  $M = m_0 N_A$  и  $R = k N_A$ , то:

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)} \quad \text{или} \quad n = n_0 e^{-\Pi/(kT)}, \quad (5.5.4)$$

где  $\Pi = m_0 gh$  – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

Выражение (5.5.4) называется *распределением Больцмана* во внешнем потенциальном поле, из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.



## 5.6. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят путь называемый *длиной свободного пробега*  $l$ . Из-за огромного числа молекул следует говорить о *средней длине свободного пробега*  $\langle l \rangle$ . При столкновении центры молекул сближаются на расстояние, называемое *эффективным диаметром молекулы*  $d$  (см. рис. 5.6.1), которое зависит от скорости молекул, т. е. от температуры газа. За 1 с молекула проходит в среднем путь, равный *средней арифметической скорости*  $\langle v \rangle$ , и если  $\langle z \rangle$  – среднее число столкновений молекулы за 1 с, то средняя длина свободного пробега

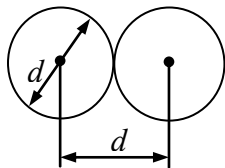


Рис. 5.6.1

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} \quad \text{или} \quad \langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где  $d$  – эффективный диаметр молекулы,  $n$  – концентрация молекул;

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}n\pi d^2 \langle v \rangle,$$

где  $\langle v \rangle$  – средняя скорость молекулы.

*Явления переноса* – необратимые процессы, в которых происходит пространственный перенос энергии (*теплопроводность*), массы (*диффузия*), импульса (*внутреннее трение*), и т. д. Рассмотрим одномерные явления переноса вдоль оси  $x$ .

1. *Теплопроводность*. Перенос энергии в форме теплоты подчиняется *закону Фурье*:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (5.6.1)$$

где  $j_E$  – *плотность теплового потока* – т. е. энергия, переносимая в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ,  $\lambda$  – *теплопроводность*,  $dT/dx$  – *градиент температуры* – скорость изменения температуры на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак минус по-

казывает, что энергия переносится в направлении убывания температуры. Теплопроводность может быть определена по формуле

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \quad (5.6.2)$$

где  $c_v$  – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объёме);  $\rho$  – плотность газа;  $\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  – средняя длина свободного пробега.

2. *Диффузия.* Диффузия заключается в самопроизвольном проникновении и перемешивании частиц (молекул) двух соприкасающихся газов, жидкостей, твёрдых тел. Таким образом, происходит обмен масс. Диффузия возникает и продолжается пока существует градиент плотности  $\rho$ .

Для химически однородного газа диффузия подчиняется *закону Фика*:

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad (5.6.3)$$

где  $j_m$  – *плотность потока массы* – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;  $D$  – *диффузия (коэффициент диффузии)*;  $d\rho/dx$  – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности. Согласно кинетической теории газов:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (5.6.4)$$

3. *Внутреннее трение (вязкость).* Сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется *закону Ньютона*:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (5.6.5)$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость;  $dv/dx$  – градиент скорости – быстрота изменения скорости в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоёв;  $S$  – площадь, на которую действует сила  $F$ . В системе СИ единица динамической вязкости  $\eta$  – Па·с (в СГС – пуаз). Наряду с динамической вязкостью рассматривают кинематическую вязкость

$$\nu = \frac{\eta}{\rho},$$

где  $\rho$  – плотность вещества. В системе СИ единица кинематической вязкости  $\text{м}^2/\text{с}$  (в СГС – стокс).

От одного слоя к другому в единицу времени передаётся импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда (5.6.5) можно представить в виде

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (5.6.6)$$

где  $j_p$  – плотность потока импульса – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;  $dv/dx$  – градиент скорости. Знак минус показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости. Динамическая вязкость может быть вычислена по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (5.6.7)$$

Из формул (5.6.2), (5.6.4), (5.6.7) вытекают формулы связи между  $\lambda$ ,  $D$  и  $\eta$ :  $\eta = \rho D$ ,  $\frac{\lambda}{\eta c_V} = 1$ .

## 5.7. Число степеней свободы молекулы

Важной характеристикой термодинамической системы является её внутренняя энергия  $U$  – энергия хаотического (теплого) движения микрочастиц (молекул, атомов, электронов и т. д.) системы и энергия взаимодействия этих частиц. Внутренняя энергия является функцией термодинамического состояния системы, но она не зависит от того, как система пришла в данное состоя-

ние. То есть при переходе системы из одного состояния в другое, изменение внутренней энергии определяется разностью значений внутренней энергии этих состояний.

Число степеней свободы молекулы – число независимых между собой возможных перемещений молекулы. Это число зависит от числа атомов образующих молекулу, структуры молекулы, а также от числа и характера межатомных связей в молекуле. Атомы молекулы при этом считают материальными точками, а саму молекулу – голономной системой (системой материальных точек с геометрическими связями). В общем, число степеней свободы молекулы определяется по формуле:

$$i = 3n - k,$$

где  $n$  – число точек системы (атомов молекулы),  $k$  – число геометрических связей.

Во многих случаях молекулу одноатомного газа считают материальной точкой, обладающей только тремя степенями свободы поступательного движения: вращение материальной точки лишено смысла (см. рис. 5.7.1а). Двухатомную молекулу считают совокупностью из двух материальных точек, жёстко связанных недеформируемой связью (см. рис 5.7.1б).

У двухатомной молекулы помимо трёх степеней свободы поступательного движения, имеется ещё две степени свободы вращательного движения (вращение вокруг оси проходящей через оба атома лишено смысла). Трёхатомные и многоатомные молекулы имеют шесть степеней свободы – три поступательных и три вращательных (см. рис 5.7.1в). Однако ещё необходимо учитывать строение многоатомной молекулы. Например молекула  $CO_2$  линейная, и имеет не три, а две вращательных степени свободы. Для реальных молекул, и при высоких температурах, необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

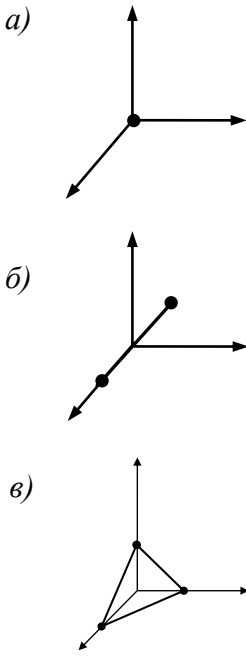


Рис. 5.7.1

На каждую из поступательных степеней свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная трети всей энергии молекулы по (5.3.6):

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT .$$

В соответствии с *законом Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул*, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия равная  $kT/2$ , а на каждую колебательную степень свободы – в среднем  $kT$  (необходимо учитывать и потенциальную энергию взаимного положения молекул). Таким образом, средняя энергия молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где  $i$  – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}} .$$

Однако в классической теории рассматривают молекулы с жёсткой связью между атомами, для них колебательные степени свободы не учитываются.

В идеальном газе мы не учитываем взаимодействие между молекулами, поэтому их взаимная потенциальная энергия равна нулю. Тогда внутренняя энергия одного моля идеального газа равна сумме кинетических энергий  $N_A$  молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT . \quad (5.7.1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы  $m$  газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT ,$$

где  $M$  – молярная масса,  $\nu$  – количество вещества.

## 5.8. Теплоёмкость. Первое начало термодинамики. Работа газа

Существуют две формы передачи энергии от одних тел к другим – работа и теплообмен. *Теплообмен* – самопроизвольный необратимый процесс переноса теплоты, обусловленный градиентом температуры. В общем случае перенос теплоты может также вызываться неоднородностью полей разных физических величин. Различают следующие виды теплообмена: теплопроводность, конвекция, лучистый теплообмен, теплообмен при фазовых превращениях. На практике теплообмен часто осуществляется несколькими видами сразу.

В соответствии с законом сохранения энергии, при любом способе перехода системы из первого состояния во второе выполняется *первое начало термодинамики* – теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение её внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A. \quad (5.8.1)$$

Последнее выражение может быть записано в следующем виде:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (5.8.2)$$

где  $dU$  – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;  $\delta A$  – элементарная работа;  $\delta Q$  – бесконечно малое количество теплоты.

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то  $\Delta U = 0$ , и  $A = Q$ . отсюда следует одна из формулировок первого начала термодинамики: *невозможен вечный двигатель первого рода – периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщённая ему извне энергия.*

Газ может совершать работу над внешними телами (работу против внешних сил) только при расширении, т. е. при увеличении занимаемого им объёма. Соответственно внешние тела (внешние силы) могут совершать работу над газом, что приводит к сжатию газа, т. е. к уменьшению объёма занимаемого газом. Совершаемая при этом элементарная работа:

$$\delta A = pdV, \quad (5.8.3)$$

где  $p$  – давление газа (при малых изменениях объёма считаем постоянным);  $dV$  – приращение объёма. При расширении газа работа, совершаемая им положительна, а при сжатии – отрицательна (см. рис. 5.8.1). Полная работа, совершаемая газом при изменении его объёма от  $V_1$  до  $V_2$ , определяется характером зависимости между давлением и объёмом газа, и находится по формуле

$$A = \int_{V_2}^{V_1} pdV. \quad (5.8.4)$$

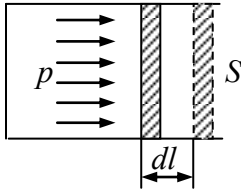


Рис. 5.8.1

*Удельная теплоёмкость вещества* – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT} \left( \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right).$$

*Молярная теплоёмкость* – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT} \left( \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right), \quad (5.8.5)$$

где  $\nu = m/M$  – количество вещества (число молей).

Удельная теплоёмкость связана с молярной:

$$C_m = cM, \quad (5.8.6)$$

где  $M$  – молярная масса вещества.

Так же различают теплоёмкости при постоянном объёме

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = \frac{iR}{2}, \quad (5.8.7)$$

при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}.$$

Последнюю формулу можно преобразовать с учётом (5.8.7) и (5.2.2), и получить уравнение Майера:

$$C_p = C_v + R. \quad (5.8.8)$$

С использованием (5.8.7) уравнение Майера можно записать:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

При анализе термодинамических процессов используют характерное для каждого газа отношение

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{(i+2)}{i}.$$

Используя рассмотренные выше теплоёмкости, первое начало термодинамики можно записать для изопроцессов. Так, при изохорном процессе ( $V = const$ ) газ не совершает работы над внешними телами, т. е.  $\delta A = pdV = 0$ . Вся теплота сообщаемая газу идёт на увеличение его внутренней энергии  $\delta Q = dU$ . Тогда для произвольной массы газа, с использованием (5.8.7), получим

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_v dT. \quad (5.8.9)$$

При изобарном процессе работа газа при расширении объёма от  $V_1$  до  $V_2$  равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1), \quad (5.8.10)$$

или, с использованием (5.2.3):

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (5.8.11)$$

В изобарном процессе при сообщении газу массой  $m$  количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT,$$

его внутренняя энергия с учётом (5.8.7) возрастает на величину



$$dU = \frac{m}{M} C_V dT.$$

При изотермическом процессе ( $T = const$ ), и  $pV = const$ . Используя (5.8.4) и (5.2.3) найдём работу изотермического расширения газа:

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так как при  $T = const$  внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0,$$

то из первого начала термодинамики для изотермического процесса следует:

$$\delta Q = \delta A,$$

т. е. всё количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (5.8.12)$$

На практике существует расхождение между значениями теплоёмкости вычисленной по формулам (5.8.7) и (5.8.8) и определённой экспериментально. Это расхождение связано с тем, что теплоёмкость зависит от температуры (см. рис. 5.8.2), и при вычислении теплоёмкости необходимо учитывать квантовые эффекты, т. е. пользоваться квантовой статистикой. Если энергия теплового движения в системе недостаточна для возбуждения колебаний определённой частоты, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоёмкость системы.

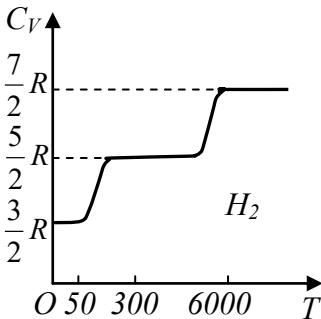


Рис. 5.8.2

## 5.9. Адиабатический процесс. Политропный процесс

*Адиабатический процесс* – процесс, при котором отсутствует теплообмен ( $\delta Q = 0$ ) между системой и окружающей средой. Так, быстропротекающие процессы можно считать адиабатическими. Из первого начала термодинамики для адиабатического процесса следует:

$$\delta A = -dU. \quad (5.9.1)$$

Используя выражения (5.8.3) и (5.8.7), найдём

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad \text{или} \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Для произвольных состояний газа можно записать

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (5.9.2)$$

Выражение (5.9.2) *есть уравнение адиабатического процесса* называемое *уравнением Пуассона*. Используя (5.2.2), уравнение Пуассона можно представить в виде:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (5.9.3)$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}, \quad (5.9.4)$$

где  $\gamma$  – *показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)*:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{(i+2)}{i}. \quad (5.9.5)$$

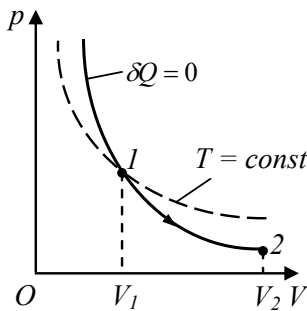


Рис. 5.9.1

Так, например, для одноатомных газов хорошо удовлетворяющих условию идеальности  $i = 3$ ,  $\gamma = 1,67$ . Для двухатомных газов  $i = 5$ ,  $\gamma = 1,4$ . Диаграмма адиабатического процесса (адиабата) в координатах  $p, V$  изображается гиперболой (см. рис. 5.9.1), более крутой, чем изотерма. *Адиабата (изоэнтропа)* – линия на термодинамической диаграмме состояния, изображающая равновесный адиабатический про-

цесс. Адиабата имеет простейший вид для идеальных газов (см. рис. 5.9.1). Для одноатомных газов (Ar, Ne и др.) при комнатной температуре показатель адиабаты  $\gamma$  равен 1,67, для двухатомных ( $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  и др.) равен 1,4. Адиабаты для данного газа не могут пересекаться, т. к. это противоречит второму началу термодинамики.

Если газ адиабатически расширяется от объёма  $V_1$  до  $V_2$ , то его температура уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$  и совершает работу

$$A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (5.9.6)$$

Последнее выражение, с учётом (5.2.2) можно также привести к виду

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатический процессы происходят при постоянной теплоёмкости. В первых двух процессах теплоёмкости соответственно равны  $C_V$  и  $C_p$ , в изотермическом процессе ( $dT = 0$ ) теплоёмкость равна  $\pm\infty$ , в адиабатическом ( $\delta Q = 0$ ) теплоёмкость равна нулю. Процесс, в котором теплоёмкость остаётся постоянной, называется *политропным*. Используя первое начало термодинамики, при условии ( $C = \text{const}$ ) можно вывести уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const}, \quad (5.9.7)$$

где  $n$  – показатель политропы:

$$n = \frac{(C - C_p)}{(C - C_V)}.$$

При  $C = 0$ ,  $n = \gamma$  из (5.9.7) получается уравнение адиабаты; при  $C = \infty$ ,  $n = 1$  – уравнение изотермы; при  $C = C_p$ ,  $n = 0$  – уравнение изобары; при  $C = C_V$ ,  $n = \pm\infty$  – уравнение изохоры. То есть все эти процессы являются частными случаями политропного процесса.

## 5.10. Круговые процессы (циклы)

*Круговые процессы (циклы)* – это процессы, при которых система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. *Круговой процесс (цикл)* – термодинамический процесс, при котором система, претерпев ряд изменений, возвращается в исходное состояние. Термодинамические параметры и характеристические функции состояния системы (внутренняя энергия, энтропия и др.) в результате круговых процессов вновь принимают первоначальные значения, и, следовательно, не изменяются. Из первого начала термодинамики следует, что при этом работа, совершённая системой, или над системой равна теплоте, полученной или отданной на каждом участке цикла. В прямых циклах теплота превращается в работу, а в обратных циклах работа затрачивается на перенос теплоты от менее нагретых тел к более нагретым.

На диаграммах циклы изображаются замкнутыми кривыми (см. рис. 5.10.1). Цикл совершаемый идеальным газом можно разбить на процесс расширения (1–2) и сжатия (2–1).

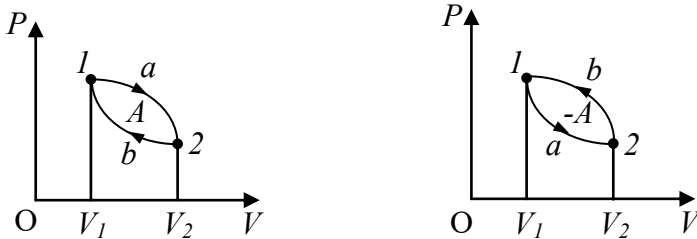


Рис. 5.10.1. Циклы прямой и обратный

Работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью замкнутой кривой. Если цикл протекает по часовой стрелке, то совершается положительная работа, и цикл называется *прямым*. Соответственно, при протекании цикла против часовой стрелки, работа будет отрицательна, цикл называется *обратным*. Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счёт полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в *холодильных машинах* – периодически действующих установках, в которых за счёт работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

При круговом процессе система возвращается в исходное состояние, и внутренняя энергия системы при этом не изменяется, работа совершаемая за цикл равна количеству полученной извне теплоты. Первое начало термодинамики для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A. \quad (5.10.1)$$

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (5.10.2)$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, полученное системой;  $Q_2$  – количество теплоты, отданное системой.

Все термодинамические процессы делят на *обратимые* и *необратимые*. Обратимым называется процесс, который может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, и при возвращении системы в исходное состояние в окружающей среде и в самой системе не происходит никаких изменений. Необратимые процессы этим условиям не удовлетворяют. Обратимые процессы – это идеализация реальных (необратимых) процессов.

### 5.11. Энтропия. Второе начало термодинамики

Отношение теплоты  $Q$ , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре  $T$  теплоотдающего тела, называется *приведённым количеством теплоты*. На бесконечно малом участке процесса приведённое количество теплоты равно  $\delta Q/T$ . Приведённое количество теплоты, сообщаемое телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (5.11.1)$$

Отсюда следует, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Эта *функция состояния* называется *энтропией*, и обозначается  $S$ :

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (5.11.2)$$

Понятие энтропии было впервые введено в термодинамике для определения меры необратимого рассеяния энергии. *Энтропия* широко применяется и в других областях науки: в статистической физике как мера вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния; в теории информации как мера неопределённости какого-либо опыта, который может иметь разные исходы. Эти трактовки энтропии имеют глубокую внутреннюю связь. Энтропия определяет характер процессов в адиабатических условиях: возможны только такие процессы, при которых энтропия либо остаётся неизменной (обратимые процессы), либо возрастает (необратимые процессы).

Можно доказать, что в замкнутых системах (не обменивающихся теплотой с внешней средой) энтропия может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов). Это утверждение записывается в виде *неравенства Клаузиуса*:

$$\Delta S \geq 0. \quad (5.11.3)$$

В незамкнутых системах (обменивающихся теплотой с внешней средой) энтропия может вести себя любым образом.

При равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2 согласно (5.11.2):

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \quad (5.11.4)$$

По последней формуле энтропия определяется с точностью до *аддитивной постоянной*. Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий. Формулу (5.11.4) можно привести к виду

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (5.11.5)$$

Так для адиабатического процесса  $\delta Q = 0$ , то по (5.11.2) и  $\Delta S = 0$  и, следовательно,  $S = \text{const}$ , т. е. адиабатический обра-

тимый процесс является *изоэнтروпийным* процессом. При изотермическом процессе  $T_1 = T_2$ , и по (5.11.5) для изотермического процесса можно записать:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

При изохорном процессе  $V_1 = V_2$  и из (5.11.5) следует

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Энтропия обладает свойством *аддитивности*: *энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему.*

Наиболее полно смысл энтропии раскрывается в статистической физике. Статистическая физика – раздел физики, посвящённый изучению свойств макроскопических тел, т. е. систем, состоящих из очень большого числа одинаковых частиц (молекул, атомов, электронов и т. д.), исходя из свойств этих частиц и взаимодействий между ними. Большое число частиц в макроскопических телах приводит к появлению новых, статистических закономерностей в поведении таких тел. Для теории, описывающей статистические закономерности, характерно вычисление не точных значений различных физических величин для макроскопических тел, а средних значений этих величин по времени.

В статистической физике энтропия связана с *термодинамической вероятностью*  $W$ , под которой понимают число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние. По Больцману  $S$  и  $W$  связаны между собой:

$$S = k \ln W, \quad (5.11.6)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана. То есть энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия рассматривается как мера вероятности состояния термодинамической системы. Поскольку состояние равновесия системы – наиболее вероятное состояние (число микросостояний максимально), то в этом состоянии энтропия также максимальна. В замкнутой

системе процессы идут в направлении увеличения числа микросостояний, другими словами, от менее вероятных состояний к более вероятным до тех пор, пока вероятность состояния не станет максимальной – *принцип возрастания энтропии*.

Первое начало термодинамики (5.8.1) выражает закон сохранения и превращения энергии, но не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов, т. е. не позволяет определить какие процессы в природе возможны, а какие нет. Ответ на этот вопрос даёт *второе начало термодинамики* (закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах): *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает*, или другими словами: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает*.

Существуют ещё две формулировки второго начала термодинамики:

1) *по Кельвину*: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

Из второго начала термодинамики по Кельвину следует, что *вечный двигатель второго рода* – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт охлаждения одного источника теплоты – невозможен;

2) *по Клаузиусу*: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.

Нарушение второго начала термодинамики означало бы возможность создания т. н. вечного двигателя 2-го рода, совершающего работу за счёт внутренней энергии теплового резервуара и не изменяющего термодинамического состояния окружающих тел. Следовательно, второе начало термодинамики можно формулировать и как невозможность создания вечного двигателя 2-го рода.

Первые два начала термодинамики дополняются *третьим началом термодинамики*, или *теоремой Нернста-Планка*: *энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина*:



$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Из теоремы Нернста-Планка следует, что теплоёмкости  $C_p$  и  $C_v$  при ноле Кельвина равны нулю.

## 5.12. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно

Второе начало термодинамики не запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому (холодильная машина), но при этом внешние силы должны совершать работу над системой, т. е. такой переход не будет являться единственным результатом процесса.

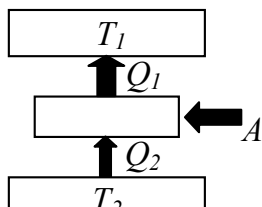
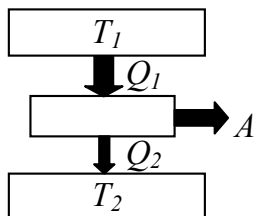


Рис. 5.12.1. Тепловая машина и холодильник

На основе второго начала термодинамики была выведена *теорема Карно*: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим к. п. д. обладают обратимые машины; при этом к. п. д. обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами) (см. рис. 5.12.1).

Карно проанализировал обратимый наиболее экономичный цикл (рис. 5.12.2), состоящий из двух изотерм (1–2 и 3–4) и двух адиабат (2–3 и 4–1), называемый *циклом Карно*. Цикл Карно – обратимый круговой процесс, в котором совершается превращение теплоты в работу (или работы в теплоту). Цикл состоит из последовательно чередующихся двух изотермических и двух адиабатических процессов, осуществляемых с рабочим телом (например, паром). Впервые рассмотрен французским физиком С. Карно (1824) как идеальный рабочий цикл теплового двигателя, совершающего работу за счёт теплоты, подводимой

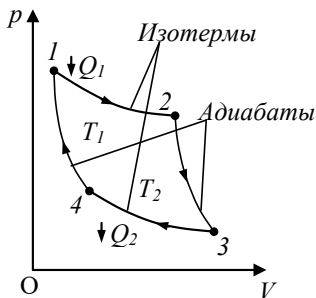


Рис. 5.12.2. Цикл Карно

к рабочему телу в изотермическом процессе. Эта работа численно равна площади ограниченной отрезками изотерм и адиабат, образующих цикл (см. рис. 5.12.2). Цикл обратим и его можно осуществить в обратной последовательности. Рабочим телом в этом цикле является идеальный газ.

Рассмотрим работу, совершаемую в прямом цикле Карно отдельно для каждого из четырёх процессов

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1; \quad A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1); \quad (5.12.1)$$

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2; \quad A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}. \quad (5.12.2)$$

Работа, совершаемая в круговом процессе:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2,$$

определяется площадью ограниченной циклом на рис. 5.12.2.

Согласно (5.10.2), и используя (5.9.3, 5.12.1, 5.12.2), к. п. д. цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5.12.3)$$

Таким образом, к. п. д. цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника, и для его увеличения нужно увеличивать разность этих температур. К.п.д. реального двигателя из-за тепловых потерь гораздо меньше к. п. д. цикла Карно.

Из формулы (5.12.3) следует

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (5.12.4)$$

Теорема Карно позволила установить термодинамическую шкалу температур.

## Глава 6. Реальные газы, жидкости и твёрдые тела

### 6.1. Свойства реальных газов. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В реальных газах действуют силы межмолекулярного взаимодействия, эти силы являются *короткодействующими*, действуют на расстояниях  $\leq 10^{-9}$  м. Между молекулами одновременно действуют силы притяжения (отрицательные) и отталкивания (положительные). *Агрегатные состояния вещества* – состояния одного и того же вещества, переходы между которыми сопровождаются скачкообразным изменением его свободной энергии, энтропии, плотности и других физических свойств. Все вещества (за некоторым исключением) могут существовать в трёх состояниях – твёрдом, жидком и газообразном. Четвёртым состоянием вещества часто считают плазму. Состояние вещества зависит от физических условий, в которых оно находится, главным образом от  $T$  и  $p$ . Переход из одного состояния в другое сопровождается скачкообразным изменением межмолекулярных расстояний и взаимодействий.

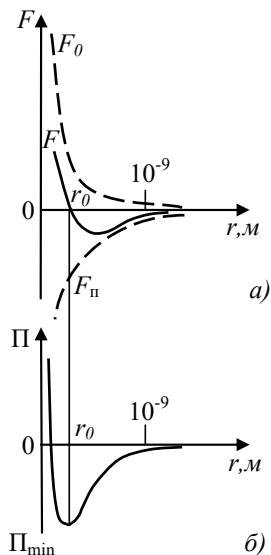


Рис. 6.1.1. Зависимость межмолекулярных сил и потенциальной энергии взаимодействия от расстояния

На определённом расстоянии между молекулами  $r_0$  эти силы уравниваются друг друга (при отсутствии теплового движения) (см. рис. 6.1.1а). Это расстояние соответствует минимуму потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия (см. рис. 6.1.1б), при этом молекулярная система находится в состоянии устойчивого равновесия.

Агрегатное состояние вещества можно определить соотношением величин  $\Pi_{\text{min}}$  – наименьшей потенциальной энергией взаимодействия молекул равной работе, которую нужно совершить против сил притяжения для разъединения молекул, и  $kT$  – удвоенной средней энергии приходящейся на одну степень свободы

теплого движения молекул. Так если  $P_{\min} \ll kT$ , то вещество находится в газообразном состоянии, молекулы не образуют агрегаты, если  $P_{\min} \gg kT$ , то вещество находится в твёрдом состоянии, молекулы колеблются около положений равновесия, если  $P_{\min} \approx kT$ , то вещество находится в жидком состоянии, молекулы перемещаются, обмениваются местами, но не расходятся на расстояние превышающее  $r_0$ .

Таким образом, для реальных газов уравнение Клапейрона-Менделеева, пренебрегающее силами межмолекулярного взаимодействия непригодно. Ван-дер-Ваальс ввёл две поправки в уравнение Клапейрона – Менделеева:

1. *Учёт собственного объёма молекул.* Объём доступный молекулам в одном моле вещества равен  $V_m - b$ , где  $b$  – объём занимаемый самими молекулами.

2. *Учёт притяжения молекул.* Действие сил притяжения приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением. Внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объёма:

$$p' = \frac{a}{V_m^2}, \quad (6.1.1)$$

где  $a$  – постоянная Ван-дер-Ваальса;  $V_m$  – молярный объём.

Введя эти поправки, получим уравнение Ван-дер-Ваальса для моля газа (уравнение состояния реальных газов):

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT; \quad (6.1.2)$$

для произвольного количества газа:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

где  $\nu = m/M$  – количество вещества (газа), или:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

Поправки  $a$  и  $b$  – постоянные для каждого газа.

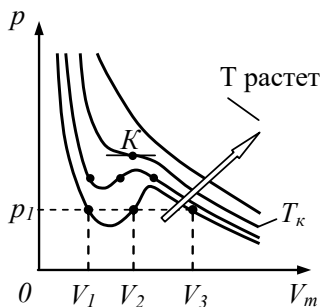


Рис. 6.1.2. Семейство изотерм Ван-дер-Ваальса

Рассмотрим семейство *изотерм Ван-дер-Ваальса* (см. рис. 6.1.2). При высоких температурах изотерма Ван-дер-Ваальса незначительно отличается от изотермы идеального газа, при некоторой *критической температуре*  $T_k$  (*критическая изотерма*) имеется одна точка перегиба кривой  $K$ , при температурах  $T < T_k$  изотермы имеют волнообразный участок. Критическое состояние газа характеризуется тремя критическими параметрами со-

стояния:  $T_k$  – *критической температурой*,  $p_k$  – *критическим давлением*,  $V_k$  – *критическим объёмом*. С использованием (6.1.2), для критических параметров можно получить формулы

$$V_k = 3b; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

Если крайние точки на изотермах (см. рис. 6.1.2) соединить линией, то получится колоколообразная кривая (см. рис. 6.1.3). Эта кривая и критическая изотерма делят диаграмму под изотермой на три области (см. рис. 6.1.3): под колоколообразной кривой располагается область двухфазных состояний (жидкость и насыщенный пар), слева от неё область жидкого состояния, справа область пара.

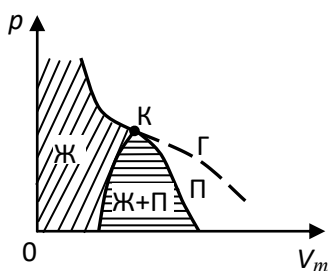


Рис. 6.1.4. Колоколообразная кривая, разделяющая области фазных состояний

*Ван-дер-Ваальсовы силы* – распространённое название сил межмолекулярного взаимодействия с энергией 0,8–8,16 кДж/моль. В настоящее время этим термином пользуются для названия сил возникающих при поляризации молекул и образовании диполей. Существует три типа ван-дер-ваальсовых сил:

1. *Ориентационные силы* действующие между полярными молекулами, т. е. молекулами обладающими дипольными электрическими моментами.

2. *Индукционные (или поляризаационные) силы* действующие между полярной и неполярной молекулами.

3. *Дисперсионные силы* действующие между неполярными молекулами.

## 6.2. Внутренняя энергия реального газа

Внутренняя энергия реального газа складывается из кинетической энергии теплового движения его молекул и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия. Работа против сил притяжения

$$\delta A = p' dV_m = \delta \Pi,$$

откуда

$$\delta \Pi = \frac{a}{V_m^2} dV_m, \text{ или } \Pi = -\frac{a}{V_m}.$$

В последней формуле постоянная интегрирования равна нулю, а знак минус подчёркивает, что межмолекулярные силы являются силами притяжения. Внутренняя энергия моля реального газа:

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m}. \quad (6.2.1)$$

Если газ адиабатически расширяется в вакуум ( $\delta A = 0$ ), то на основании первого начала термодинамики, следует, что внутренняя энергия газа не изменяется:

$$U_1 = U_2. \quad (6.2.2)$$

Последнее равенство для идеального газа означает равенство температур при таком процессе ( $T_1 = T_2$ ). А для двух состояний моля реального газа с учётом (6.2.2) можно записать

$$U_1 = C_V T_1 - \frac{a}{V_1}; \quad U_2 = C_V T_2 - \frac{a}{V_2}.$$

Тогда получаем:

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right). \quad (6.2.3)$$

Так как  $V_2 > V_1$ , то  $T_1 > T_2$ , т. е. реальный газ при адиабатическом расширении в вакуум охлаждается, а при адиабатическом сжатии нагревается.

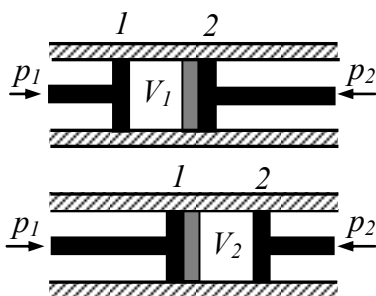


Рис. 6.2.1. Эффект Джоуля – Томсона

Рассмотрим адиабатический процесс, при котором реальный газ с параметрами  $p_1, V_1, T_1$  проходит через пористую перегородку под действием внешних сил (работа отрицательна  $A_1 = p_1 V_1$ ). После прохождения перегородки газ будет характеризоваться параметрами  $p_2, V_2, T_2$  и будет расширяться (работа положительна  $A_2 = p_2 V_2$ ). Давления  $p_1$  и  $p_2$  поддерживаются постоянными, и  $p_1 > p_2$  (см. рис. 6.2.1). Используем первое начало термодинамики:

$$\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A = 0, \quad (6.2.4)$$

где  $\delta A = A_2 - A_1$ . Подставляя выражения для работ запишем

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \quad (6.2.5)$$

В этом процессе остаётся неизменной величина  $U + pV$ , которая является функцией состояния и называется *энтальпией*.

*Энтальпия (тепловая функция, теплосодержание)* – термодинамический потенциал, характеризующий состояние системы в термодинамическом равновесии при выборе в качестве независимых переменных давления, энтропии и числа частиц.

Энтальпию можно так же определить как сумму внутренней энергии тела и работы, которую необходимо затратить, чтобы тело объёмом  $V$  ввести в окружающую среду, имеющую давление  $p$  и находящуюся с телом в равновесном состоянии. Энтальпия системы аналогично внутренней энергии и другим термодина-

мическим потенциалам имеет вполне определенное значение для каждого состояния, т. е. является функцией состояния.

Для одного моля газа, используя (6.2.5), получим

$$T_2 - T_1 = \frac{2a(1/V_2 - 1/V_1) - b(p_2 - p_1)}{C_V + R} - \frac{ab(1/V_2^2 - 1/V_1^2)}{C_V + R}. \quad (6.2.6)$$

Из этого выражения следует, что знак разности  $(T_2 - T_1)$  зависит от того, какая из поправок Ван-дер-Ваальса играет большую роль. Так если  $a \approx 0$  (не учитываем силы притяжения), то  $(T_2 - T_1) > 0$ , газ будет нагреваться. Если  $b \approx 0$  (не учитываем размеры молекул), то  $(T_2 - T_1) < 0$ , газ будет охлаждаться. Подставим в (6.2.6) выражение для  $p_1$ , вычисленное из (6.1.2):

$$T_2 - T_1 \approx \frac{bRT_1}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1}, \quad (6.2.7)$$

т.е. знак разности температур зависит от значений начального объёма  $V_1$  и начальной температуры  $T_1$ .

*Адиабатическое дросселирование* – медленное прохождение газа под действием перепада давления сквозь *дроссель*, в результате чего изменяется температура газа, называется *эффектом Джоуля – Томсона*. Он считается *положительным*, если газ охлаждается, и *отрицательным* если газ нагревается. Для одного и того же газа эффект может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от условий. *Температура инверсии* – температура, при которой происходит изменение знака эффекта Джоуля – Томсона (для данного давления):

$$T = \frac{2a}{Rb} \left( 1 - \frac{b}{V} \right). \quad (6.2.8)$$

### 6.3. Свойства жидкостей

*Жидкость* – агрегатное состояние вещества, промежуточное между твёрдым и газообразным. Жидкости присущи некоторые черты твёрдого тела (сохраняет свой объём, образует поверхность, обладает определённой прочностью на разрыв) и газа (принимает



форму сосуда, в котором находится, может непрерывно переходить в газ); в то же время она обладает рядом только ей присущих особенностей, из которых наиболее характерная – текучесть.

В жидкостях суммарная энергия молекул так же складывается из энергии их хаотического теплового движения и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия. При перемещении молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой совершается работа за счёт кинетической энергии молекул, эта работа идёт на увеличение потенциальной энергии молекулы. Поэтому поверхностные молекулы обладают дополнительной *поверхностной энергией*, которая пропорциональна площади слоя  $\Delta S$ :

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (6.3.1)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение – плотность поверхностной энергии. Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать форму с минимальной поверхностью, т. е. форму шара. По этим же причинам поверхность жидкости соприкасающейся с различными телами может быть выпуклой или вогнутой. В этом случае на жидкость оказывается дополнительное (избыточное) давление. Для выпуклой поверхности оно считается положительным, а для вогнутой отрицательным. Это избыточное давление определяется по *формулам Лапласа*. Так для выпуклой поверхности

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\sigma\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2\sigma}{R}; \quad (6.3.2)$$

для вогнутой

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}, \quad (6.3.3)$$

где  $R$  – радиус кривизны поверхности;  $r$  – радиус выпуклой или вогнутой поверхности. Общая формула Лапласа определяющая избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двойкой кривизны

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (6.3.4)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в данной точке. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости.

В узких трубках (капиллярах) жидкость может смачивать стенки, тогда её поверхность в трубке будет вогнутой, и наоборот, если жидкость не смачивает стенки – выпуклой. Высота  $h$ , на которую поднимется жидкость в капилляре

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}. \quad (6.3.5)$$

Здесь  $\sigma$  – поверхностное натяжение;  $\theta$  – краевой угол (угол между касательными к поверхностям жидкости и твёрдого тела);  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $r$  – радиус капилляра.

Если жидкость смачивает стенки, то под её вогнутой поверхностью появляется отрицательное избыточное давление (6.3.3), и в капилляре она будет подниматься, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведёт к опусканию жидкости в капилляре.

#### 6.4. Свойства твёрдых тел

*Твёрдое тело* – агрегатное состояние вещества, характеризующееся стабильностью формы и характером теплового движения атомов, которые совершают малые колебания вокруг положений равновесия. Различают кристаллические и аморфные твёрдые тела. Кристаллы характеризуются пространственной периодичностью в расположении равновесных положений атомов. В аморфных телах атомы колеблются вокруг хаотически расположенных точек. Устойчивым состоянием (с минимальной внутренней энергией) твёрдого тела является кристаллическое. С термодинамической точки зрения аморфное тело находится в метастабильном состоянии и со временем должно закристаллизоваться.

Большинство твёрдых тел (материалов) являются *поликристаллами*; они состоят из множества отдельных беспорядочно

ориентированных мелких кристаллических зёрен (кристаллитов). Таковы, например, многие горные породы, технические металлы и сплавы. Крупные одиночные кристаллы называют *монокристаллами*.

Физические свойства кристаллов связаны между собой и обусловлены атомно-кристаллической структурой, силами связи между атомами и энергетическим спектром электронов.

Особенностью монокристаллов является их *анизотропность* – зависимость физических свойств кристалла (механических, тепловых, электрических и т. д.) от направления.

Исследования свойств твёрдых тел объединились в большую область – *физику твёрдого тела*, развитие которой стимулируется потребностями техники. Около половины физиков мира работают в области физики твёрдого тела.

Твёрдые тела (кристаллы) характеризуются наличием значительных сил межмолекулярного взаимодействия и сохраняют постоянными не только свой объём, но и форму. Кристаллы имеют *кристаллическую решётку* – структуру с регулярным расположением частиц с периодической повторяемостью в трёх измерениях. Точки, в которых расположены частицы, и около которых они совершают тепловые колебания, называются *узлами кристаллической решётки*. В зависимости от рода частиц, расположенных в узлах кристаллической решётки, и характера сил взаимодействия между ними кристаллы подразделяются на четыре типа: *ионные* (в узлах располагаются поочерёдно ионы противоположного знака), *атомные* (в узлах располагаются нейтральные атомы, удерживающиеся ковалентными связями), *металлические* (в узлах располагаются положительные ионы, электроны которых коллективизированы) и *молекулярные* (в узлах располагаются нейтральные молекулы удерживаемые силами межмолекулярного притяжения).

Частице в узле кристаллической решётки приписывается три колебательных степени свободы, каждая из которых обладает энергией  $kT$ . Тогда внутренняя энергия одного моля твёрдого тела

$$U_m = 3N_A kT = 3RT,$$

где  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $N_A k = R$  ( $R$  – молярная газовая постоянная).

Молярная теплоёмкость твёрдого тела (*Закон Дюлонга и Пти*):

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = 3R \approx 25 [\text{Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})]. \quad (6.4.1)$$

Таким образом, молярная теплоёмкость *химически простых тел* в кристаллическом состоянии одинакова и не зависит от температуры.

Если твёрдое тело является химическим соединением, то число частиц в одном моле равно не  $N_A$ , а  $nN_A$ , где  $n$  – число атомов в молекуле. В таком случае молярная теплоёмкость *твёрдых химических соединений*

$$C_V = 3nR \approx 25n [\text{Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})],$$

т. е. равна сумме атомных теплоёмкостей элементов, составляющих это соединение.

Однако, у некоторых веществ, как показывает опыт, теплоёмкость не равна  $3R$ . Расхождение опытных и теоретических значений теплоёмкостей, вычисленных на основе классической теории, объясняется квантовой теорией теплоёмкости.

## 6.5. Диаграмма состояния вещества

Термодинамически равновесное состояние вещества определяется так называемой *фазой*. Одно и то же вещество может находиться в разных равновесных состояниях, т. е. в разных фазах. Переход вещества из одной фазы в другую называется *фазовым переходом*. *Фазовые переходы 1-го рода* характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объёма. Например, при плавлении тела, полученная телом теплота идёт не на нагрев тела, а на разрушение его кристаллической решётки. При переходах из твёрдого кристаллического состояния в жидкое или из жидкого в газообразное степень беспорядка увеличивается, и, согласно второму началу термодинамики энтропия системы возрастает. При обратных переходах система выделяет теплоту, а энтропия уменьшается. *Фазовые переходы 2-го рода* характеризуются постоянством объёма и энтропии, и не связаны с поглощением или выделением теплоты. Но при этих переходах скач-

кообразно меняется теплоёмкость. Фазовые переходы 2-го рода связаны с изменением симметрии: выше точки перехода система, как правило, обладает более высокой симметрией, чем ниже точки перехода.

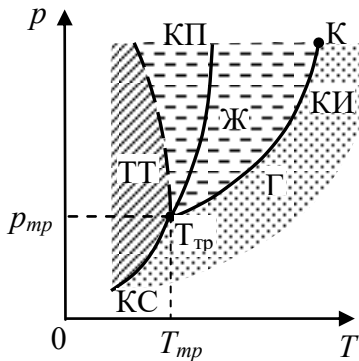


Рис. 6.5.1. Диаграмма состояния вещества

Для изображения фазовых переходов (превращений) используется диаграмма состояния вещества (см. рис. 6.5.1), где показана зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде *кривых фазового равновесия*. На диаграмме КИ – кривая испарения, КП – кривая плавления, КС – кривая сублимации, разделяют поле диаграммы на области существования твёрдой (ТТ), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз. Каждая

точка на этих кривых соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз. Точка, которая определяет условия равновесного сосуществования трёх фаз вещества, называется *тройной точкой*. Тройная точка воды является реперной точкой термодинамической температурной шкалы.

Согласно (5.2.2), производная от равновесного давления по температуре:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \quad (6.5.1)$$

где  $L$  – теплота фазового перехода;  $(V_2 - V_1)$  – изменение объёма вещества при переходе его из первой фазы во вторую;  $T$  – температура перехода (процесс изотермический). Уравнение (6.5.1) позволяет определить наклоны кривых равновесия.

Как видно из рис. 6.5.1, для большинства веществ повышение температуры приводит к увеличению давления, и наоборот (сплошная КП). Для некоторых веществ ( $H_2O$ ,  $Ge$ , чугун и др.) повышение температуры ведёт к уменьшению давления (штриховая КП).

## Задания для самостоятельной работы и задачи к главам 5, 6

### *Зачётные требования*

1. Знать основные понятия, определения и законы термодинамики, молекулярной физики и физики реальных веществ.
2. Знать опытные законы идеального газа.
3. Формулировать и применять к решению задач уравнение Клапейрона – Менделеева и основное уравнение молекулярно-кинетической теории.
4. Знать распределения Максвелла и Больцмана для идеального газа и применять их на практике.
5. Знать явления переноса в неравновесных системах и соответствующие законы.
6. Уметь определять количество степеней свободы молекулы.
7. Знать и применять на практике первое начало термодинамики, в том числе для изопробов.
8. Знать адиабатический, политропный и круговой процессы, соответствующие им графики.
9. Знать про энтропию и второе начало термодинамики.
10. Знать цикл Карно и его график.
11. Знать уравнение Ван-дер-Ваальса и его изотермы.
12. Знать эффект Джоуля – Томсона.
13. Знать капиллярные явления.
14. Иметь общие представления о типах твёрдых тел, фазовых переходах и тройной точке.

### *Зачётные задания*

Выполнить задания, данные ниже, в соответствии со своим вариантом.

#### *Задача 1.*

В колбе объемом  $V$  находится смесь газов известной природы ( $M_1, M_2$  – молярные массы) при температуре  $t$  °С. Экспериментатор установил, что при давлении газа  $p_1$  масса колбы с газом была равна  $m_1$ , а при давлении  $p_2$  –  $m_2$  (см. табл. 6.6.1).

Найти:

1. Молярную массу смеси и массовую долю каждого из компонентов газовой смеси  $x_1$  и  $x_2$ , если температура газа  $t$  °С.

Массовая доля компонента  $x_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$ .

2. Число молекул каждого из компонентов ( $N_1, N_2$ ), их концентрации ( $n_1, n_2$ ), значения квадратичной и наиболее вероятной скоростей.

3. Найти:

а) среднюю энергию теплового движения одной молекулы (выразить ее в эВ);

б) энергию теплового движения молекул газа (внутреннюю энергию);

в) молярные теплоемкости газовой смеси и теплоемкость смеси (при неизменном объеме и неизменном давлении);

г) показатель адиабаты смеси  $\gamma$ .

Таблица 6.6.1

№ n/n	V, см <sup>3</sup>	m1, г	m2, г	p1, мм рт.ст.	p2, мм рт.ст.	t, оС	Химический состав
1	300	144,26	143,92	742	70	22	O <sub>2</sub> , N <sub>2</sub>
2	260	121,67	121,50	750	30	17	O <sub>2</sub> , H <sub>2</sub>
3	350	153,38	152,97	737	42	25	Ar, He
4	240	117,66	117,51	744	25	20	N <sub>2</sub> , H <sub>2</sub>
5	270	131,44	131,12	740	15	32	CO <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub>
6	310	141,83	141,60	748	30	19	He, CO
7	175	89,19	88,97	753	18	24	Ar, CH <sub>4</sub>
8	340	138,65	138,52	745	50	20	SO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub>
10	320	133,71	133,55	739	42	30	CO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub>
11	340	140,84	140,71	750	31	18	O <sub>2</sub> , He
12	290	125,08	124,92	752	37	20	N <sub>2</sub> , He
13	240	121,17	120,81	725	41	22	SO <sub>2</sub> , NH <sub>3</sub>
14	250	125,23	125,04	740	47	24	N <sub>2</sub> , He
15	350	152,47	152,35	755	53	30	CO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub>
16	310	148,44	148,05	750	44	21	CO <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub>

### Задача 2.

Используя числовые данные о процессе, приведенные в табл. 6.6.2, рассчитать недостающие в условии параметры, а также найти:

- 1) работу  $A_{1,2}$ , совершаемую газом;
- 2) количество теплоты  $Q_{1,2}$ , переданное газу;
- 3) изменение внутренней энергии  $\Delta U$ .

Привести диаграмму процесса в координатах  $p, V$ .

Таблица 6.6.2

№ n/n	Процесс	Газ	$\nu$ , моль	$m$ , кг	$p1$ , кПа	$V1$ , л	$t1$ , °C	$p2$ , кПа	$V2$ , л	$t2$ , °C
1	$\delta Q = 0$	O <sub>2</sub>	1,0		100	22			11	
2	$dT = 0$	N <sub>2</sub>	1,2		70	40		35		
3	$dp = 0$	He		0,010	100		27			77
4	$dV = 0$	Воздух	0,8		100		20			60
5	$dT = 0$	O <sub>2</sub>		0,029		20	30		40	
6	$\delta Q = 0$	He	2,0		200	40		80		
7	$dp = 0$	Ar		0,043	200		33			200
8	$dV = 0$	Ne		0,012	90	15				300
9	$dT = 0$	He	1,0		100	23		80		
10	$\delta Q = 0$	Воздух		0,021		15	25	30		
11	$dp = 0$	O <sub>2</sub>	1,2				20	100		250
12	$dV = 0$	Ar		0,010		5	40			100
13	$dT = 0$	Cl <sub>2</sub>			100	20		50		50
14	$\delta Q = 0$	He			100	40	20		20	
15	$dp = 0$	Воздух		0,015	100		25			70

### Контрольные вопросы к главам 5, 6

1. Идеальный газ Уравнение состояния идеального газа.
2. Распределение Максвелла по скоростям и энергиям.
3. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.
4. Явление переноса. Перенос массы.
5. Явление переноса. Перенос импульса.



6. Явление переноса. Перенос энергии.
7. Число степеней свободы. Распределение энергии молекул по степеням свободы.
8. Первое начало термодинамики.
9. Работа в термодинамике.
10. Внутренняя энергия идеального газа.
11. Теплоёмкость. Связь  $C_p$  и  $C_v$ .
12. Изопроцессы. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.
13. Изопроцессы. Изоэнтропийный (адиабатический) процесс.
14. Круговые (циклические) процессы, равновесные и неравновесные процессы, обратимые и необратимые процессы.
15. Цикл Карно. Коэффициент полезного действия цикла Карно.
16. Энтропия.
17. Второе начало термодинамики.
18. Силы и потенциальная энергия взаимодействия. Уравнение Ван-дер-Ваальса.
19. Изотермы Ван-дер-Ваальса. Анализ изотерм.
20. Фазовые переходы. Диаграмма состояния. Тройная точка.

### Список литературы

1. Савельев И. В. Курс физики: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2018. 436 с.
2. Савченко Н. Д., Кузьмина Т. В., Рахлецова Т. В. Основы физики: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1. Механика. Электродинамика. Термодинамика. Чита: ЗабГУ, 2017. 229 с.
3. Трофимова Т. И. Физика. М.: Академия, 2006. 560 с.
4. Трофимова Т. И., Фирсов А. В. Курс физики. Задачи и решения. М.: Академия, 2011. 592 с.

## Глава 7. Электрическое поле

### 7.1. Электрический заряд. Свойства заряда

*Электрический заряд* – физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия заряженных частиц или тел.

Наименьший электрический заряд называется элементарным, его величина  $e = \pm 1,67 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

Единица измерения заряда  $q$  в системе СИ есть кулон (Кл).

$$[q] = 1 \text{ Кл}.$$

Один кулон равен заряду, проходящему через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с, 1 Кл = 1 А·с.

Носитель элементарного отрицательного заряда – электрон ( $e$ ), масса его  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ; носитель наименьшего положительного заряда – протон ( $p$ ), масса  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ . Свойства заряда:

1) существует два вида заряда: положительный и отрицательный;

2) между двумя зарядами существует силовое взаимодействие: заряды одного знака отталкиваются, разного – притягиваются;

3) заряд не существует вне материальных тел, носителем элементарного заряда являются элементарные частицы (электрон, протон, античастицы и т. д.);

4) Заряд  $q$  дискретен, являясь целым кратным элементарного заряда  $e$ :  $q = N \cdot e$ , где  $N$  – число элементарных зарядов;

5) заряд аддитивен: заряд системы тел равен алгебраической сумме зарядов всех тел системы  $q = \sum q_i$ ;

6) заряд инвариантен, т. е. не зависит от выбора системы отсчета, движется она или покоится;

7) заряд подчиняется закону сохранения: *алгебраическая сумма зарядов изолированной системы постоянна и не зависит от процессов внутри системы*

$$\sum_i^N q_i = \text{const},$$

где  $N$  – число зарядов в системе.

Этот закон установлен экспериментально и является одним из фундаментальных законов физики.

Изолированная система – система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами;

8) заряд обладает электрическим полем, посредством которого он взаимодействует с другими зарядами. Движущийся заряд создает также магнитное поле.

Вследствие малости элементарного заряда величину макрозарядов можно считать непрерывной и характеризовать плотностью заряда:

1. Объемная плотность заряда  $\rho = dq / dV$  есть отношение заряда  $dq$  к малому объему  $dV$ , в котором находится заряд.

2. Поверхностная плотность  $\sigma = dq / dS$  равна отношению заряда  $dq$  к малой площади поверхности  $dS$ , на которой распределен заряд.

3. Линейная плотность  $\tau = dq / dl$  равна отношению заряда  $dq$  к длине малого отрезка  $dl$  нити (цилиндра), по которой распределен заряд.

## 7.2. Закон Кулона

Закон взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов установил Ш. Кулон в 1785 г.

**Закон Кулона:** сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна произведению их величин  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (7.2.1)$$

### Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{н} \cdot \text{м}^2), \Phi / \text{м}.$$

### Коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9, [k] = 1 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}.$$

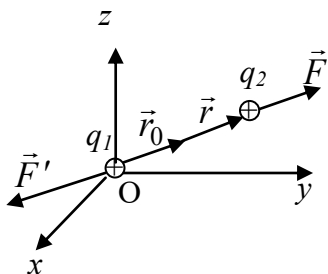


Рис. 7.2.1

Точечный заряд – заряженное тело, размерами которого можно пренебречь.

Сила  $\vec{F}$  направлена по прямой, соединяющей заряды (центральная сила). Сила  $F$  в формуле (7.2.1) – алгебраическая величина, вычисляемая с учетом знаков зарядов, если  $F > 0$ , заряды отталкиваются, если  $F < 0$ , заряды притягиваются (см. рис. 7.2.1).

В векторной форме закон можно записать в виде

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = F_r \cdot \vec{r}_0, \quad (7.2.2)$$

где  $\vec{r}_0 = \vec{r} / r$  – единичный вектор радиус-вектора  $\vec{r}$ ,  $|\vec{r}_0| = 1$ ,  $F_r = kq_1 q_2 / r^2$  – проекция силы  $\vec{F}$  на радиус-вектор  $\vec{r}$ .

## 7.3. Электростатическое поле в вакууме. Напряжённость поля

Электрический заряд  $q$  создает в окружающем пространстве *электрическое поле*, посредством которого осуществляется взаимодействие зарядов.

Поле неподвижного заряда называется *электростатическим*.

Оно проявляется по воздействию на пробный заряд  $q_0$  (точечный положительный заряд малой величины) с силой

$$F = kq q_0 / r^2. \quad (7.3.1)$$

Сила  $F$  зависит от величины заряда  $q_0$ . Однако, отношение  $F / q_0$  не зависит от  $q_0$  и является характеристикой поля, создаваемого зарядом  $q$ , называемой напряженностью.

Напряженность поля  $\vec{E}$  есть отношение силы  $\vec{F}$  к величине пробного заряда:

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0, \quad (7.3.2)$$

направление вектора  $\vec{E}$  совпадает с направлением силы  $\vec{F}$ , действующей на пробный заряд  $q_0$ . Напряженность  $\vec{E}$  – силовая характеристика электрического поля. Вектор  $\vec{E}$  направлен от положительного заряда к отрицательному.

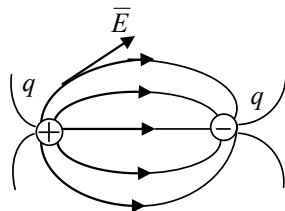
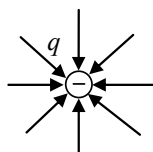
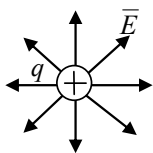


Рис. 7.3.1

Графически электростатическое поле представляется в виде *линий напряженности*, т. е. линий, касательные к которым в каждой точке определяют направление вектора  $\vec{E}$  (см. рис. 7.3.1).

Напряженность электрического поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него:

$$E = k \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}. \quad (7.3.3)$$

Поле, в котором  $\vec{E} = const$ , называется *однородным*. Линии напряженности его параллельны вектору  $\vec{E}$ . Поле точечного заряда имеет радиальные линии напряженности. Густота линий больше там, где больше величина  $E$ .

Для характеристики электрического поля применяется также физическая величина, называемая *поток вектора напряженности*. Поток вектора  $\vec{E}$  через элементарную площадку  $dS$  определяется в вид

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n \cdot dS, \quad (7.3.4)$$

где  $E_n = E \cdot \cos \alpha$ ,  $\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$ ,  $\vec{n}$  – орт нормали к площадке  $dS$  (см. рис. 7.3.2).

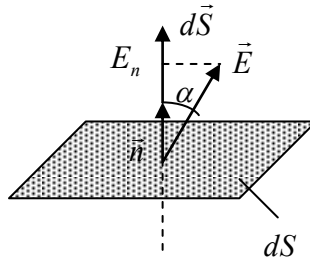


Рис. 7.3.2

Поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_S E_n dS,$$

сквозь замкнутую поверхность  $S$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint_S E_n \cdot dS. \quad (7.3.5)$$

#### 7.4. Принцип суперпозиции электростатических полей

*Принцип суперпозиции* (наложения) электростатических полей: напряженность  $\vec{E}$  электрического поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей  $\vec{E}_i$  полей каждого заряда  $q_i$  в отдельности

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i. \quad (7.4.1)$$

Принцип основывается на результатах опыта, который показывает, что кулоновские силы подчиняются принципу независимости действия сил классической механики: результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на заряд  $q_0$  в поле системы зарядов

$(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , равна векторной сумме сил  $\vec{F}_i$ , действующих на  $q_0$  со стороны каждого заряда,

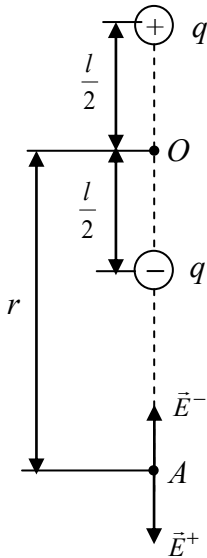


Рис. 7.4.1

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i.$$

Поскольку

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}, \quad \vec{F}_i = q_0 \vec{E}_i,$$

то

$$\vec{F} = \sum q_0 \vec{E}_i = q_0 \sum \vec{E}_i.$$

Тогда

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (7.4.2)$$

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатическое поле любой системы зарядов, например, поле электрического диполя (см. рис. 7.4.1):

$$\vec{E}_A = \vec{E}^+ + \vec{E}^-; \quad E_A = \frac{kq}{(r+0,5l)^2} - \frac{kq}{(r-0,5l)^2}; \quad \vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

### 7.5. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля

Поток вектора напряженности  $\vec{E}$  сквозь сферическую поверхность  $S_1=S$  радиуса  $r$ , в центре которой находится заряд  $q$ , определяется в виде

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint E_n dS = \frac{q \cdot 4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{\epsilon_0} q, \quad (7.5.1)$$

поскольку, в силу радиальной симметрии, величина  $E_n = E$ , постоянна на сфере (см. рис. 7.5.1). Формула (7.5.1) выражает теорему Остроградского-Гаусса для поля одного заряда.

Этот результат справедлив для любой другой сферической поверхности  $S_3$  или произвольной замкнутой поверхности  $S_2$ , о-

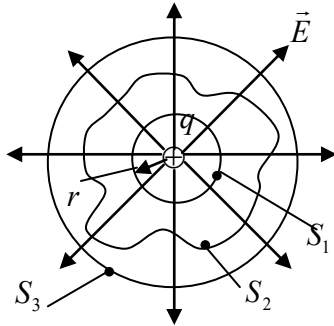


Рис. 7.5.1

ватывающей заряд  $q$ , поскольку поток  $\Phi_E$  одинаков для всех этих поверхностей и не зависит от их формы.

Поток вектора  $\vec{E}$  поля, создаваемого системой  $n$  зарядов через произвольную поверхность, охватывающую эти заряды, в соответствии с принципом суперпозиции и формулой (7.5.1) определится в виде

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (7.5.2)$$

или

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} q, \quad (7.5.3)$$

где  $q = \sum_i q_i$ .

Формула (7.5.3) выражает *теорему Остроградского – Гаусса* для электростатического поля в вакууме: *поток вектора напряженности сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на постоянную  $\epsilon_0$ .*

Суммарный заряд  $q$  находящийся в объеме  $V$  можно выразить через объемную плотность заряда  $\rho$ :

$$q = \int_V \rho dV,$$

где  $V$  – объем, в котором распределен заряд  $q$ .

Тогда поток  $\Phi_E$  в соответствии с (7.5.3):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (7.5.4)$$



### Теорема Остроградского – Гаусса в общем случае

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV,$$

где  $\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \vec{a}$  – дивергенция вектора  $\vec{a}$ ,  $\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ .

В соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса поток вектора  $\vec{E}$  вычисляется в виде

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{E} dV, \quad (7.5.5)$$

здесь  $\nabla \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z$  – дивергенция вектора  $\vec{E}$ .

Из равенства выражений (7.5.4) и (7.5.5) следует

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (7.5.6)$$

что является дифференциальной формой теоремы Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме.

## 7.6. Расчёт электрических полей по теореме Остроградского – Гаусса

### Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости, поверхностная плотность заряда  $\sigma = \text{const}$ . Вектор  $\vec{E}$  направлен перпендикулярно плоскости, поле симметрично относительно плоскости (см. рис. 7.6.1).

Мысленно построим замкнутую поверхность в виде цилиндра с основанием площадью  $\Delta S$  на плоскости.

Поток напряженности через оба основания цилиндра

$$\Phi_E = 2E \cdot \Delta S_0.$$

Заряд, охватываемый поверхностью цилиндра

$$\Delta q = \sigma \Delta S.$$

По теореме (7.5.2) получим

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (7.6.1)$$

### Поле двух параллельных бесконечных плоскостей

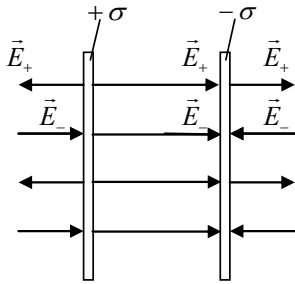


Рис. 7.6.2

Поле двух параллельных бесконечных плоскостей (см. рис. 7.6.2), заряженных разноименно с плотностью  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Напряженности полей обеих плоскостей равны по модулю  $E_+ = |E_-| = \sigma / 2\epsilon_0$ .

Суммарное поле определяется по принципу суперпозиции:

а) снаружи обеих плоскостей

$$E = E_+ - |E_-| = 0;$$

б) между плоскостями

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

### Поле равномерно заряженной сферической поверхности

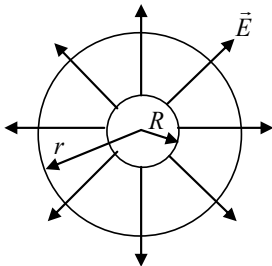


Рис. 7.6.3

Сфера радиусом  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$  и общим зарядом  $q$ . Поле имеет радиальную симметрию, поэтому  $E = E_n$ ,  $\vec{E} = E_n \vec{n}$ .

Построим мысленно сферическую поверхность радиуса  $r > R$  вокруг заряженной сферы (см. рис. 7.6.3).

По теореме (7.5.2) полный поток вектора  $\vec{E}$  через эту сферу

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint E dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q, \quad (7.6.2)$$

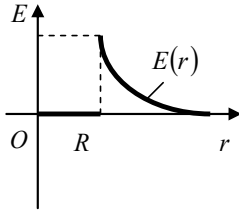


Рис. 7.6.4

напряженность поля сферы

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad r \geq R. \quad (7.6.3)$$

Зависимость  $E = E(r)$  аналогична формуле  $E$  для точечного заряда (7.2.4) (см. рис. 7.6.4).

Внутри заряженной поверхности ( $r < R$ ) зарядов нет, поэтому  $E = 0$ .

*Поле объемно заряженного шара*

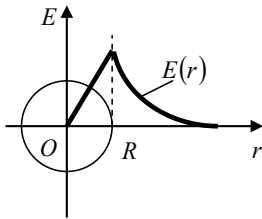


Рис. 7.6.5

Шар радиусом  $R$ , с общим зарядом  $q$ , равномерно заряжен по всему объему

$$\text{с плотностью } \rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

В силу симметрии напряженность поля вне шара определяется аналогично формуле для сферы (7.6.3)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad r \leq R. \quad (7.6.4)$$

Внутри шара будет иначе: сфера радиуса  $r_1 < R$  охватывает заряд  $q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3$ . По теореме (7.5.2)  $E \cdot S_1 = E \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi r_1^3$ ,

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \cdot r_1, \quad r_1 < R, \quad (7.6.5)$$

где  $E$  – напряженность поля внутри шара линейно зависит от расстояния  $r_1$  от центра  $O$  (см. рис. 7.6.5).

*Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити)*

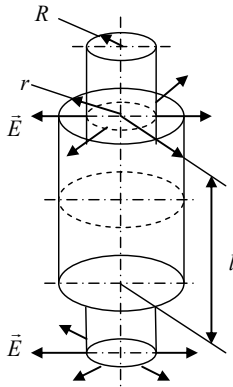


Рис. 7.6.6

Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен с линейной плотностью  $\tau = \frac{dq}{dl} = const$ .

Линии напряженности направлены радиально, перпендикулярно оси цилиндра,  $E = E_n$ . Заряженный цилиндр мысленно охватывается соосным цилиндром радиуса  $r > R$  и длиной  $l$  (см. рис. 7.6.6).

Поток вектора  $\vec{E}$  через его боковую поверхность

$$\Phi_E = E \cdot S = E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} q = \frac{1}{\epsilon_0} \tau \cdot l,$$

тогда напряженность

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (7.6.6)$$

Внутри заряженного по поверхности цилиндра  $E = 0$  (как внутри полой сферы).

**7.7. Работа электростатического поля.  
Циркуляция вектора  $\vec{E}$**

Работа силы  $\vec{F}$  электростатического поля по перемещению точечного заряда  $q_0$  вдоль произвольной траектории из т. 1 в т. 2 (см. рис. 7.7.1) определяется в виде

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \alpha = F dr,$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_2}^{r_1} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (7.7.1)$$

Работа не зависит от формы траектории и определяется начальным и конечным положением заряда  $q_0$ ; следовательно, элек-

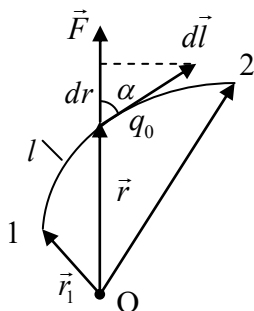


Рис. 7.7.1

тростатическое поле является потенциальным, сила  $F$  – консервативной.

Работа  $A_{12}$  при перемещении заряда по замкнутому контуру  $l$  будет равна нулю, т. к.  $r_1 = r_2$ :

$$\oint_l dA = 0.$$

Поскольку элементарная работа

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q_0 \cdot \vec{E}d\vec{l} = q_0 Edl \cos \alpha = q_0 E_l dl, \quad (7.7.2)$$

то для единичного заряда  $q_0 = 1$

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = \oint_l E_l dl = 0, \quad (7.7.3)$$

этот интеграл называется циркуляцией вектора напряженности  $\vec{E}$ . Равенство циркуляции  $\vec{E}$  нулю является свойством потенциального поля.

## 7.8. Потенциал электростатического поля

Работа потенциального силового поля может быть представлена как разность потенциальных энергий заряда  $q_0$  в начальном и конечном положениях  $W_1$  и  $W_2$ .

Из выражения работы (7.7.1) следует

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_2}. \quad (7.8.1)$$

Потенциальная энергия заряда  $q_0$  в поле заряда  $q$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}, \quad (7.8.2)$$

поскольку принимается, что при  $r \rightarrow \infty$   $W = 0$  и постоянная  $C = 0$ . Если заряды – одного знака, то  $W > 0$ , если разного,  $W < 0$ .

Потенциал электростатического поля  $\phi$  есть отношение потенциальной энергии заряда  $q_0$  к его величине

$$\phi = \frac{W}{q_0}, \quad (7.8.3)$$

и является энергетической характеристикой поля.

Потенциал точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  с учетом (7.8.2) имеет вид

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (7.8.4)$$

единица измерения потенциала – вольт ( $1 В = 1 Дж/Кл$ ). Потенциал поля в некоторой точке – физическая величина, равная потенциальной энергии единичного пробного заряда в данной точке.

Работа поля при перемещении заряда  $q_0$  из т. 1 в т. 2 выразится через разность потенциалов в этих точках:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0(\phi_1 - \phi_2), \quad (7.8.5)$$

т. к.  $W = q_0\phi$ .

Разность потенциалов между двумя точками поля равна работе по перемещению единичного заряда между этими точками:

$$\phi_1 - \phi_2 = A_{12} / q_0. \quad (7.8.6)$$

Работа при перемещении заряда из данной точки в бесконечность  $A_\infty = q_0\phi$ , т. к.  $\phi_\infty = 0$ .

Поэтому

$$\phi = A_\infty / q_0, \quad (7.8.7)$$

потенциал равен работе поля по перемещению заряда  $q_0$  из данной точки в бесконечность.

Потенциальная энергия заряда  $q_0$ , находящегося в поле системы  $n$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (7.8.8)$$

Потенциал поля системы зарядов в некоторой точке

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}. \quad (7.8.9)$$

### 7.9. Связь напряженности и потенциала. Вычисление разности потенциалов

В соответствии с (7.8.6) и (7.7.2) работа по перемещению заряда  $q_0$  имеет вид

$$A_{12} = q_0(\phi_1 - \phi_2) \text{ и } A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (7.9.1)$$

Следовательно

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl, \quad (7.9.2)$$

разность потенциалов выражается через напряженность поля  $\vec{E}$ .

Элементарная работа по перемещению заряда равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dW = -q_0 \cdot d\phi, \quad (7.9.3)$$

и для единичного заряда ( $q_0 = 1$ )  $dA = -d\phi$ .

Тогда, учитывая (7.9.2), получаем

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\phi,$$

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\phi, \quad (7.9.4)$$

где  $d\phi$  – полный дифференциал потенциала  $\phi$ , являющегося непрерывной функцией координат  $\phi = \phi(x, y, z)$ ,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot dz. \quad (7.9.5)$$

Из (7.9.4) и (7.9.5) следует, что

$$E_x = -\partial\phi/\partial x, \quad E_y = -\partial\phi/\partial y, \quad E_z = -\partial\phi/\partial z. \quad (7.9.6)$$

В общем виде

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi = -\left(\vec{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \quad (7.9.7)$$

или

$$\vec{E} = -\nabla\phi,$$

напряженность поля  $\vec{E}$  равна градиенту потенциала, взятому со знаком минус, который показывает, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону убывания  $\phi$ .

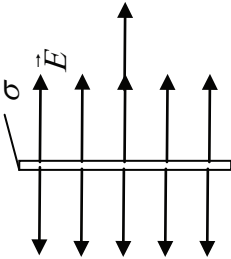
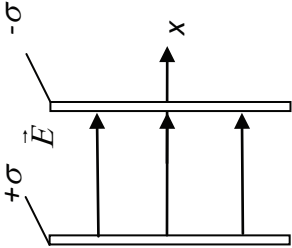
Формулы (7.9.2) и (7.9.7) задают связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля.

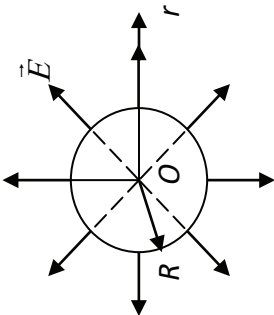
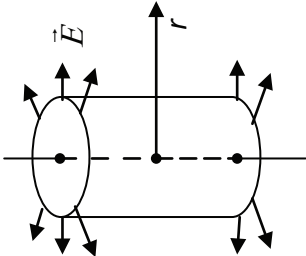
Вычисление разности потенциалов  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  дано в табл. 7.9.1 на примерах некоторых полей.



Таблица 7.9.1

Связь напряжённости и потенциала электростатического поля

Графический вид поля	Тип поля	Напряжённость	$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$
<p>1</p> 	<p>2</p> <p>Поле бесконечной плоскости, <math>\sigma = const</math></p>	<p>3</p> <p><math>E = \sigma / (2\epsilon_0)</math>  <math>E = E_x = const</math></p>	<p>4</p> <p><math>\Delta\phi = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx =</math>  <math>= \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1)</math></p>
	<p>Поле двух плоскостей  <math> \sigma^+  =  \sigma^-  = \sigma</math>  <math>\sigma = const</math></p>	<p><math>E = \sigma / \epsilon_0</math>  <math>E = E_x = const</math></p>	<p><math>\Delta\phi = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx =</math>  <math>= \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1) =</math>  <math>= \sigma \cdot d / \epsilon_0</math>  <math>d = x_2 - x_1</math></p>

	<p>Поле равномерно заряженной сферы, радиуса <math>R</math>, с зарядом <math>q</math></p>	$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $E = E_r$ <p><math>r</math> – расстояние от центра сферы</p>	$\Delta\phi = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$ <p><math>r &gt; R</math></p>
	<p>Поле равномерно заряженного цилиндра радиуса <math>R</math>, с плотностью заряда <math>\tau</math></p>	$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$ $E = E_r$ <p><math>r</math> – расстояние от оси цилиндра до точки поля</p>	$\Delta\phi = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

## 7.10. Диэлектрики в электрическом поле. Поляризованность диэлектрика

Вещество в обычном состоянии является электрически нейтральным, поскольку его суммарный заряд, т. е. сумма положительных и отрицательных зарядов всех атомов и молекул, равен нулю,  $q = 0$ .

Все тела, в зависимости от концентрации свободных зарядов, т. е. зарядов, которые могут перемещаться по всему объему тела, делятся на три группы:

- проводники – тела с высокой концентрацией свободных зарядов (металлы, расплавы солей, растворы кислот и т. д.);
- диэлектрики – тела, в которых практически нет свободных зарядов (пластмассы, стекло, чистая вода и др.);
- полупроводники – тела, имеющую среднюю концентрацию свободных зарядов между проводниками и диэлектриками (германий, кремний, селен и др.).

Диэлектрики под действием внешнего поля *поляризуются*: связанные заряды смещаются в противоположных направлениях в пределах молекулы, и возникает собственное суммарное поле диэлектрика, направленное против внешнего поля.

Поляризация диэлектрика в электрическом поле – возникновение избыточных связанных зарядов на поверхности диэлектрика в результате ориентации электрических диполей по направлению внешнего поля.

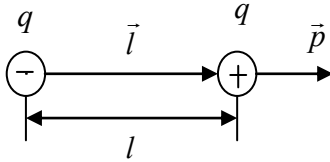


Рис. 7.10.1

Молекула со смещенными зарядами является электрическим диполем. *Электрический диполь* – система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов  $(+q, -q)$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, которое значи-

тельно меньше расстояния до рассматриваемой точки поля (см. рис. 7.10.1). Диполь характеризуется дипольным электрическим моментом  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (7.10.1)$$

где  $\vec{l}$  – вектор, направленный от заряда  $(-q)$  к заряду  $(+q)$ .

Диэлектрики делятся на три типа, отличающиеся по способу (механизму) поляризации:

*Неполярные диэлектрики* – имеют неполярные молекулы (с симметричным расположением зарядов); дипольный момент молекулы в отсутствие внешнего поля равен нулю ( $\vec{p} = 0$ ). Например, молекулы  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CH_4$ ,  $CO_2$  и др.

Во внешнем поле положительный и отрицательный заряды молекулы (атома) смещаются относительно друг друга (электронные оболочки их деформируются), и молекула приобретает дипольный момент  $\vec{p}$ .

Поляризованность неполярного диэлектрика

$$\vec{P} = n_0 \vec{p},$$

где  $n_0$  – концентрация молекул. Дипольный момент молекулы:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E},$$

где  $\alpha$  – поляризуемость молекулы, зависящая от ее объема. Тогда

$$\vec{P} = n_0 \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad \chi = n_0 \alpha.$$

Такая поляризация называется *электронной* или *деформационной*. Она зависит от напряженности поля  $\vec{E}$  и не зависит от температуры тела (от теплового движения молекул).

*Полярные диэлектрики* – диэлектрики, молекулы которых имеют несимметричное распределение зарядов и поэтому обладают дипольным моментом в отсутствие внешнего поля ( $\vec{p} \neq 0$ ). Например, молекулы  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $CO$ ,  $HCl$  и др. Вследствие теплового движения молекул их дипольные моменты ориентированы хаотично, их сумма равна нулю, и в целом диэлектрик не поляризован.

Во внешнем поле происходит преимущественная ориентация дипольных моментов молекул диэлектрика по направлению поля  $\vec{E}$ , которая частично нарушается в результате теплового движения молекул. Такая поляризация называется *ориентационной*, она растет по мере увеличения напряженности поля  $E$  и снижения температуры диэлектрика. (Деформационная поляризация здесь также может оказывать дополнительное влияние).

Поляризованность полярного диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i = n_0 \langle \vec{p}_i \rangle = \frac{1}{V} n \langle \vec{p}_i \rangle,$$

где  $\langle \vec{p}_i \rangle$  – средний дипольный момент всех  $n$  молекул в объеме  $V$ . Поляризованность вычисляется по формуле

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}.$$

Диэлектрическая восприимчивость полярного диэлектрика определяется по формуле Дебая – Ланжевена

$$\chi = \frac{n_0 p^2}{3\epsilon_0 kT},$$

при условии, что напряженность не велика,

$$E \ll \frac{kT}{p},$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура;  $p$  – дипольный момент молекулы.

Полярный диэлектрик подвержен также деформационной поляризации, поэтому в общем случае коэффициент  $\chi$  определяется суммой

$$\chi = \chi_1 + \chi_2,$$

где  $\chi_1 = n_0 \alpha$ ,  $\chi_2 = n_0 p^2 / (3\epsilon_0 kT)$ .

*Ионные диэлектрики* – диэлектрики, имеющие ионную кристаллическую решетку. Например, соли NaCl, KCl, KBr и др. Ионные кристаллы имеют решетку с правильным чередованием положительных и отрицательных ионов. Во внешнем поле происходит смещение положительной и отрицательной подрешеток в противоположные стороны. Происходит поляризация диэлектрика, которая называется *ионной*.

Мерой поляризации диэлектрика является векторная величина – *поляризованность*  $\vec{P}$ , равная геометрической сумме дипольных моментов молекул  $\vec{p}_i$  в единице объема  $V$  диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (7.10.2)$$

где  $N$  – количество молекул в объеме  $V$  диэлектрической среды.

Для изотропного диэлектрика при условии, что напряженность  $\vec{E}$  не аномально велика, существует линейная зависимость между поляризованностью  $\vec{P}$  и вектором  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (7.10.3)$$

где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость вещества, безразмерная величина, составляющая для большинства обычных диэлектриков значения от нескольких единиц до нескольких десятков.

### 7.11. Напряжённость электростатического поля в диэлектрике

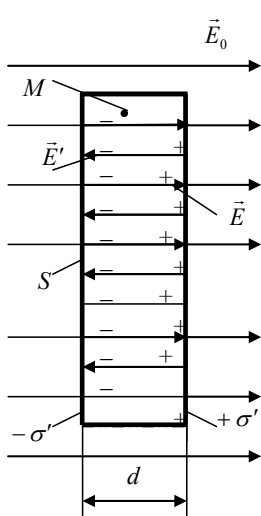


Рис. 7.11.1

Диэлектрик  $M$ , помещенный во внешнее электростатическое поле  $\vec{E}_0$ , поляризуется: под действием поля положительные и отрицательные заряды молекул вещества смещаются в противоположные стороны (диполи ориентируются по направлению внешнего поля), и на поверхностях диэлектрика возникает избыток связанных зарядов  $q'$  с плотностью  $-\sigma'$  и  $+\sigma'$ , которые создают собственное электрическое поле  $\vec{E}'$ , направленное против поля  $\vec{E}_0$  и ослабляющее его (см. рис. 7.11.1).

Поле в диэлектрике  $\vec{E}$  определяется по принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad E = E_0 - E'. \quad (7.11.1)$$

Поле связанных зарядов  $\vec{E}'$  можно представить как поле, образованное двумя бесконечными заряженными плоскостями (см. гл. 7.6), тогда  $E' = \sigma' / \varepsilon_0$ .

Величина  $\sigma'$  определяется как  $\sigma' = q' / S$ , здесь  $S$  – площадь поверхности пластины диэлектрика.

Поляризованность плоскопараллельной пластины диэлектрика находится в виде

$$P = \frac{1}{V} \sum_i p_i = \frac{1}{V} \sum_i q_i l_i = \frac{1}{V} q' d = \frac{q'}{S}, \quad (7.11.2)$$

здесь  $V = S \cdot d$  – объем пластины.

Следовательно,  $\sigma' = P$ . С учетом (7.10.3)

$$E' = \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 \chi E}{\epsilon_0} = \chi E. \quad (7.11.3)$$

Напряженность результирующего поля

$$E = E_0 - E' = E_0 - \chi E, \quad E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon},$$

$$\epsilon = 1 + \chi. \quad (7.11.4)$$

Следовательно

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon, \quad (7.11.5)$$

где величина  $\epsilon = (1 + \chi)$  – диэлектрическая проницаемость среды, показывающая, во сколько раз поле  $\vec{E}$  в диэлектрике ослаблено по сравнению с полем в вакууме  $\vec{E}_0$ .

Для обычных веществ значения  $\epsilon$  составляют от нескольких единиц до нескольких десятков.

В формуле (7.11.4) под полем  $\vec{E}_0$  понимается поле свободных зарядов с учетом их возможного перераспределения при появлении связанных зарядов  $q'$  на диэлектрике.

## 7.12. Электрическое смещение. Применение теоремы Остроградского – Гаусса к электростатическому полю в среде

Электрическое смещение  $\vec{D}$  – векторная величина, вводимая для характеристики электрического поля в среде в дополнение к вектору напряженности  $\vec{E}$  и определяемая в виде

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (7.12.1)$$

где  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ .

Электрическое смещение  $\vec{D}$  описывает внешнее поле, создаваемое свободными зарядами, но с учетом их перераспределения в пространстве, вызванного появлением индуцированных связанных зарядов в диэлектрике.

Графически вектор  $\vec{D}$  изображается аналогично  $\vec{E}$  с помощью линий электрического смещения. Отличие состоит в том, что линии напряженности поля могут выходить и заканчиваться как на свободных, так и на связанных зарядах, а линии электрического смещения – только на свободных зарядах, проходя через диэлектрик, не прерываясь.

Теорема Остроградского – Гаусса в применении к электростатическому полю в среде записывается для потока вектора  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность  $S$ :

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q = \sum_i q_i. \quad (7.12.2)$$

Поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

В таком виде теорема справедлива как для однородных изотропных, так и для неоднородных анизотропных сред.

Применение вектора смещения  $\vec{D}$  позволяет упростить расчет электрических полей в среде, поскольку:

1) применение теоремы (7.5.2) в веществе не дает возможности определить  $\vec{E}$ , в связи с тем, что ее выражение



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i (q_i + q'_i) = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'), \quad (7.12.3)$$

содержит неизвестный по величине суммарный связанный заряд  $q'$ . Применение теоремы в форме (7.12.2) устраняет это затруднение;

2) вектор напряженности  $\vec{E}$  при переходе через границу двух диэлектриков изменяется скачком, т. к.  $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon$ . Применение вектора  $\vec{D}$  как характеристики поля позволяет устранить необходимость пересчета величины  $\vec{E}$  на границе диэлектрика, поскольку

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0, \quad (7.12.4)$$

здесь  $\vec{E}_0 = \epsilon \vec{E}$  – поле в вакууме;  $\vec{D}_0$  – электрическое смещение в вакууме, и, следовательно, величина  $\vec{D}$  не изменяется при переходе через границу среды по нормали.

#### *Условия на границе раздела двух диэлектрических сред*

В общем случае поле при переходе через границу двух диэлектриков изменяется.

Определим связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе между двумя однородными изотропными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_\tau + \vec{E}_n; \quad \vec{D} = \vec{D}_\tau + \vec{D}_n.$$

Применяя теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру ABCDA, выделенному на границе диэлектриков (см. рис. 7.12.1), получим связь между касательными составляющими векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ :

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{или} \quad E_{\tau_2} \cdot l - E_{\tau_1} \cdot l = 0, \quad E_{\tau_2} = E_{\tau_1}. \quad (7.12.5)$$

Поскольку  $D = \epsilon_0 \epsilon E$ , то

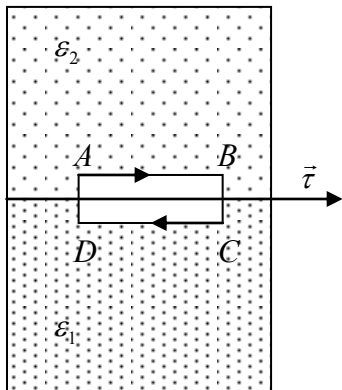


Рис. 7.12.1

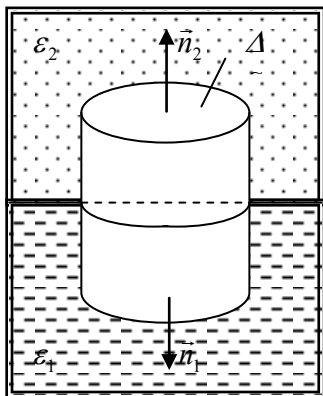


Рис. 7.12.2

нормальная составляющая  $D_n$  изменяются скачком.

Соотношение углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (см. рис. 7.12.3) определяется в виде

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{\tau 2} / E_{n 2}}{E_{\tau 1} / E_{n 1}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (7.12.6)$$

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса получим связь между нормальными составляющими векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ . Поток вектора  $\vec{D}$  сквозь элементарный цилиндр с основанием  $\Delta S$ , выделенный на границе диэлектриков (см. рис. 7.12.2)

$$D_{n 2} \cdot \Delta S - D_{n 1} \cdot \Delta S = 0,$$

поскольку на границе нет свободных зарядов.

Следовательно

$$D_{n 1} = D_{n 2}, \quad \frac{E_{n 1}}{E_{n 2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (7.12.7)$$

Итак, при переходе через границу двух диэлектрических сред касательная составляющая  $E_\tau$  вектора  $\vec{E}$  и нормальная составляющая  $D_n$  вектора  $\vec{D}$  изменяются непрерывно (без скачка), а нормальная составляющая  $E_n$  и касательная составляющая  $D_\tau$  изменяются скачком.

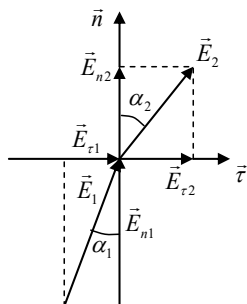


Рис. 7.12.3

и чем больше  $\epsilon_2$  по сравнению с  $\epsilon_1$ , тем больше отклоняются векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  от нормали к поверхности раздела двух сред.

### 7.13. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция

Электрические свойства проводников в электростатическом поле определяются существованием в них свободных зарядов (в металлах – электронов проводимости). При отсутствии внешнего электрического поля положительно заряженные ионы компенсируют поле свободных электронов, и проводник электрически нейтрален.

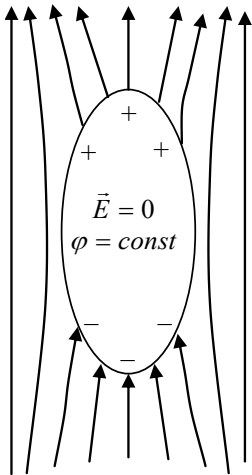


Рис. 7.13.1

Под действием внешнего поля свободные заряды перераспределяются в проводнике так, что возникает собственное поле смещенных электронов и положительно заряженных ионов, которое полностью компенсирует внешнее поле внутри проводника.

Явление перераспределения зарядов в проводнике под действием внешнего поля называется *электростатической индукцией*. Заряды, возникающие на проводнике, называются *индуцированными*.

Свободные заряды перемещаются в проводнике до установления равновесия, практически мгновенно.

Состояние проводника характеризуется следующими условиями:

1) напряженность поля внутри проводника равна нулю,  $\vec{E} = 0$ ; весь объем проводника эквипотенциален (см. рис. 7.13.1);

2) напряженность поля на поверхности проводника направлена по нормали к поверхности,  $\vec{E} = \vec{E}_n$ ,  $\vec{E}_\tau = 0$ . Иначе нарушается условие равновесия зарядов, возникает их движение по поверхности проводника (электрический ток), что противоречит закону сохранения энергии и эксперименту;

3) *некомпенсированные заряды располагаются на поверхности проводника. Это следует из теоремы Остроградского-Гаусса: заряд, охватываемый произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , равен нулю, поскольку  $\vec{E} = 0$ ,*

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = q = 0. \quad (7.13.1)$$

Напряженность поля вблизи поверхности проводника и ее связь с электрическим смещением определяются с помощью теоремы (7.12.2):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = q, \quad (7.13.2)$$

здесь  $S$  – площадь основания малого цилиндра, пересекающего поверхность  $\Sigma$  проводника по нормали (см. рис. 7.13.2). Поскольку

внутри проводника  $\vec{D} = 0$ , поток вектора  $\vec{D}$  зависит только от величины наружного основания цилиндра площадью  $S$ . Заряд, соответствующий поверхности проводника  $S$

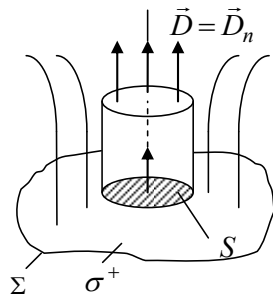


Рис. 7.13.2

$$q = \oint_S \sigma \cdot dS, \quad (7.13.3)$$

здесь  $\sigma$  есть плотность заряда на поверхности проводника.

Следовательно

$$D = D_n = \sigma, \quad (7.13.4)$$

$D$  – электрическое смещение равно плотности смещенных зарядов на проводнике. Поскольку  $D = \epsilon_0 \epsilon E$ , то напряженность вблизи поверхности проводника:

$$E = D / (\epsilon_0 \epsilon) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (7.13.5)$$

Формула (7.13.4) поясняет смысл термина «электрическое смещение  $\vec{D}$ »: величина  $\sigma$  есть плотность индуцированных, т. е.

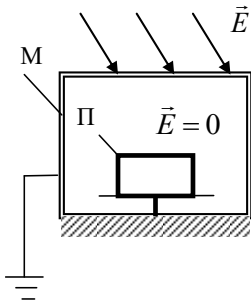


Рис. 7.13.3.  
 П – защищаемый прибор,  
 М – металлическая оболочка

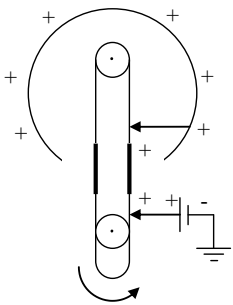


Рис. 7.13.4.  
 Электростатический генератор

смещенных, зарядов на поверхности проводника под действием внешнего поля.

Свойства проводника в электростатическом поле имеют широкое применение:

– электростатическая защита – экранирование объектов от влияния внешних электрических полей. Поскольку внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , необходимо создать в нем

полость и поместить в нее защищаемый объект. В качестве проводника применяется металлическая оболочка или густая металлическая сетка, которые заземляются (см. рис. 7.13.3);

– электростатический генератор – устройство, используемое для накопления значительных зарядов, создающих разности потенциалов до  $10^6$  В и более. Его действие основано на свойстве избыточных зарядов располагающихся на поверхности проводника (см. рис. 7.13.4).

#### 7.14. Электрическая ёмкость проводника. Конденсаторы, их ёмкости

Свойства заряженного проводника создавать электрическое поле зависят от величины заряда и его потенциала. Опыт показывает, что между ними существует линейная зависимость

$$q = C \cdot \phi, \quad (7.14.1)$$

здесь

$$C = q / \phi, \quad (7.14.2)$$

есть электрическая емкость уединенного проводника, изолированного от действия других тел.

Ёмкость проводника характеризует его способность накапливать электрический заряд и зависит от размеров и формы

проводника, но не зависит от его заряда, потенциала, материала, наличия внутренних полостей, поскольку заряд располагается на поверхности проводника.

Единица измерения емкости 1 *фарад* = 1 Кл/В есть емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Это крупная единица измерения, поэтому применяют дробные единицы: 1 мФ =  $10^{-3}$  Ф (миллифарад), 1 мкФ =  $10^{-6}$  Ф (микрофарад), 1 нФ =  $10^{-9}$  Ф (нанофарад), 1 пкФ =  $10^{-12}$  (пикофарад).

Например, уединенный шар радиусом  $R$  в вакууме имеет потенциал и емкость

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}, \quad C = \frac{q}{\phi} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (7.14.3)$$

Устройства, способные накапливать электрический заряд, называются электрическими конденсаторами. Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), имеющих одинаковые по модулю заряды  $q$  противоположного знака. Проводники должны иметь такую форму, размеры и расположение, чтобы поле было сосредоточено в узком зазоре между проводниками.

Заряд  $q$  первого проводника индуцирует на втором проводнике заряд противоположного знака, который снижает потенциал суммарного поля. В результате емкость конденсатора увеличивается по сравнению с емкостью одного проводника.

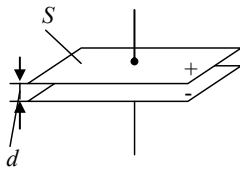


Рис. 7.14.1

Емкость конденсатора (взаимная емкость двух проводников) определяется по формуле

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{q}{\phi_1 - \phi_2}, \quad (7.14.4)$$

здесь  $q$  – заряд одного из проводников (обкладок),  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  – разность потенциалов между ними.

Наиболее распространены три типа конденсаторов:

– плоский, состоящий из двух параллельных пластин, площадью  $S$  каждая, расстояние между которыми  $d$ , заряд  $q = \sigma S$  (см. рис. 7.14.1);

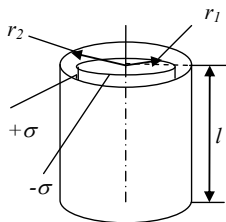


Рис. 7.14.2

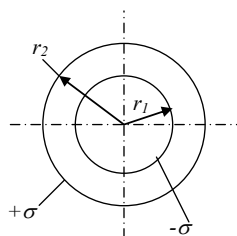


Рис. 7.14.3

– цилиндрический, образованный двумя соосными цилиндрами радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) и длиной  $l$  (см. рис. 7.14.2);

– сферический, состоящий из двух концентрических сфер радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) (см. рис. 7.14.3).

Формулы емкости конденсаторов приведены в табл. 7.14.1, составленной с учетом табл. 7.9.1 (см. гл. 7.9) и наличия диэлектрика, имеющего диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ , между обкладками кон-

денсатора. В таблице также даны формулы для вычисления разности потенциалов между обкладками конденсаторов в зависимости от их параметров.

Таблица 7.14.1

### Ёмкость конденсаторов

№	Тип конденсатора	Разность потенциалов	Ёмкость
1	Плоский	$\Delta\phi = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0}$	$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$
2	Цилиндрический	$\Delta\phi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$	$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$
3	Сферический	$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$	$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

Из этих формул следует, что емкость увеличивается при увеличении размеров конденсатора, уменьшении зазора между обкладками и увеличением числа  $\epsilon$ .

С целью повышения емкости конденсаторы соединяют в батареи, включая их параллельно или последовательно (см. рис. 7.14.4, 7.14.5). Суммарная емкость батареи конденсаторов  $C$ , состоящей из  $n$  конденсаторов емкостью  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , определяется формулами, приведенными в табл. 7.14.2.

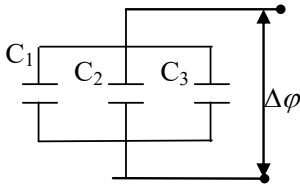


Рис. 7.14.4. Параллельное соединение

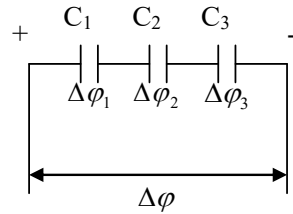


Рис. 7.14.5. Последовательное соединение

Таблица 7.14.2

### Ёмкость батареи конденсаторов

<i>Тип соединения</i>	<i>Постоянная величина</i>	<i>Суммарная величина</i>	<i>Ёмкость батареи конденсаторов</i>
Параллельное	$\Delta\phi = const$	$q = \sum_{i=1}^n q_i$	$C = \sum_{i=1}^n C_i$
Последовательное	$q = const$	$\Delta\phi = \sum_{i=1}^n \Delta\phi_i$	$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

Параллельное соединение позволяет увеличить емкость батареи конденсаторов и ее суммарный заряд, при постоянной разности потенциалов.

При последовательном соединении емкость батареи меньше емкостей отдельных конденсаторов, однако, разность потенциалов на каждом конденсаторе меньше величины  $\Delta\phi$ .



### 7.15. Энергия уединённого проводника, системы зарядов, конденсатора. Энергия электростатического поля

Энергия уединенного проводника равна работе, совершаемой при зарядке проводника в результате переноса заряда из бесконечности на проводник, имеющий емкость  $C = q / \phi$ .

Элементарная работа при переносе заряда  $dq$  на заряженный проводник

$$dA = \phi dq = C\phi d\phi, \quad dq = Cd\phi. \quad (7.15.1)$$

Полная работа, совершаемая при сообщении телу заряда  $q$  и изменении его потенциала от нуля до  $\phi$

$$A = \int_0^{\phi} C\phi d\phi = \frac{1}{2}C\phi^2. \quad (7.15.2)$$

Энергия проводника

$$W = \frac{1}{2}C\phi^2 = \frac{1}{2}q\phi = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (7.15.3)$$

Энергия системы  $n$  неподвижных точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (7.15.4)$$

здесь  $\phi_i$  – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в точке, где находится этот заряд (см. гл. 7.8). В соответствии с гл. 7.8, потенциал  $\phi_i$  определяется в виде

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{r_j},$$

здесь  $j = 1, \dots, n-1$  – индекс всех зарядов, кроме  $q_i$ .

Энергия конденсатора определяется в виде

$$W = \frac{1}{2}q\Delta\phi = \frac{1}{2}C\Delta\phi^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (7.15.5)$$

Энергия электростатического поля  $W_E$  распределена в объеме поля. Поле плоского конденсатора сосредоточено практически в объеме конденсатора, между его пластинами, и энергия поля равна энергии конденсатора:  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = U$ ,

$$W_E = \frac{1}{2} C \Delta\phi^2. \quad (7.15.6)$$

Подставляя значение емкости  $C = \epsilon_0 \epsilon S / d$  и учитывая, что  $\Delta\phi = Ed$ , получим

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 V, \quad (7.15.7)$$

здесь  $V = S \cdot d$  – объем конденсатора, т. е. поля.

Энергия поля характеризуется объемной плотностью энергии, являющейся энергией единицы объема поля:

$$w = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED, \quad D = \epsilon_0 \epsilon E. \quad (7.15.8)$$

Формула (7.15.8) справедлива и для переменного электрического поля, а также и потенциального. Плотность энергии неоднородного поля

$$w = \frac{dW_E}{dV} = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2. \quad (7.15.9)$$

Тогда энергия поля в объеме  $V$  в изотропной среде определится в виде

$$W_E = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 dV = \int_V \frac{1}{2} ED dV. \quad (7.15.10)$$

Энергия электрического поля заряженного тела равна энергии этого тела

$$W_E = \int_V w dV = \frac{1}{2} C \phi^2. \quad (7.15.11)$$

Энергия электростатического поля системы зарядов равна энергии этой системы зарядов (7.15.4).

Сила, с которой притягиваются друг к другу пластины плоского конденсатора (пондеромоторная сила) определяется с помощью его энергии из условия

$$F = -dW / dx, \quad (7.15.12)$$

поскольку  $dA = -dW$ ,  $dA = Fdx$ .

Учитывая, что

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / x, \quad W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 \epsilon S} x, \quad (7.15.13)$$

получим

$$F = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 \epsilon S} = -\frac{\epsilon_0 \epsilon S \Delta \phi^2}{2d^2}, \quad (7.15.14)$$

отрицательный знак означает, что  $F$  есть сила притяжения.

Диэлектрик, поляризованный во внешнем электрическом поле с напряженностью,  $E$  имеет объемную плотность энергии

$$w' = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0 \chi}{2} E^2 = \frac{1}{2} PE, \quad (7.15.15)$$

здесь  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика;  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика;  $P$  – поляризованность диэлектрика.

Энергия поля диэлектрика в объеме  $V$

$$W' = \int_V w' dV. \quad (7.15.16)$$

Объемная плотность энергии поля с напряженностью  $E$  в вакууме

$$w_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (7.15.17)$$

Общая (полная) плотность энергии поля в диэлектрике

$$w = w_0 + w' = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2.$$

## Глава 8. Постоянный электрический ток

### 8.1. Электрический ток. Сила, плотность тока

*Электрический ток* – упорядоченное движение заряженных частиц или тел.

Существует два типа электрического тока:

1. *Ток проводимости* – упорядоченное перемещение свободных заряженных частиц в среде или в вакууме (ток в металлах, электролитах, ионизированном газе, плазме, пучок электронов в вакууме).

2. *Конвекционный ток* – упорядоченное движение заряженных макротел в пространстве.

Возникновение и существование тока в среде (проводнике) возможно при следующих условиях:

– создание внешнего электрического поля не электростатического типа, энергия которого расходуется на перемещение зарядов и непрерывно пополняется;

– существование в среде (проводнике) свободных зарядов, способных упорядоченно перемещаться (электроны проводимости в металлах, ионы в электролитах, электроны и дырки в полупроводниках и т. д.);

– образование замкнутой электрической цепи.

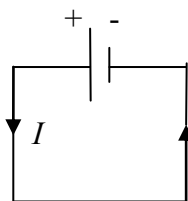


Рис. 8.8.1

Направление электрического тока определяется направлением упорядоченного движения положительных зарядов во внешнем поле (см. рис. 8.1.1).

Электрический ток характеризуется количественно силой тока  $I$  – скалярной физической величиной, равной отношению заряда  $dq$ , прошедшего через поперечное сечение проводника за малое время  $dt$  к величине  $dt$ :

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (8.1.1)$$

$[I] = A$ ,  $1 A = 1 \text{ Кл/с}$  (*ампер*). 1 ампер – сила постоянного тока, проходящего по двум параллельным проводникам бесконечной длины и малого поперечного сечения, расположенным в вакууме

на расстоянии 1 м друг от друга, и создающего между ними силу взаимодействия  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины проводника.

Электрический ток называется постоянным, если сила тока и направление не изменяются со временем:

$$I = \frac{q}{t} = \text{const}.$$

Плотность тока – физическая величина, равная отношению силы тока к площади поперечного сечения проводника, нормального направлению электрического тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (8.1.2)$$

Плотность тока рассматривается как *векторная величина*, вектор  $\vec{j}$  направлен в сторону течения тока, т. е. по направлению скорости движения положительных зарядов.

Для постоянного по сечению проводника тока плотность тока

$$j = \frac{I}{S_{\perp}}.$$

Плотность тока характеризует распределение силы тока по поверхности, через которую течет ток, и направление тока. Сила тока через произвольную поверхность  $S$  определяется потоком вектора  $\vec{j}$ :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (8.1.3)$$

здесь  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ ;  $\vec{n}$  – орт нормали площадки  $dS$ ;  $\vec{j}$  – плотность тока на площадке.

Сила тока определяется зарядом  $dq$ , проходящим по проводнику в единицу времени. Заряд  $dq$  может быть найден как общее количество элементарных зарядов  $e$ , проходящих со средней скоростью упорядоченного движения  $\langle v \rangle$  через поперечное сечение проводника за время  $dt$ :

$$dq = ne \langle v \rangle S dt, \quad (8.1.4)$$

здесь  $n$  – концентрация свободных элементарных зарядов в проводящей среде.

Тогда ток и плотность тока

$$I = \frac{dq}{dt} = ne \langle v \rangle S, \quad j = ne \langle v \rangle. \quad (8.1.5)$$

## 8.2. Сторонние силы. ЭДС. Напряжение

Электростатическое поле не способно создавать в проводнике электрический ток в течение длительного времени, т. к. перемещение свободных зарядов в проводнике приводит к выравниванию разности потенциалов и прекращению тока (см. гл. 7.13) вследствие исчезновения поля внутри проводника.

Для поддержания тока в проводнике необходимо, чтобы в электрической цепи существовало устройство, разделяющее разноименные электрические заряды и создающее разность потенциалов под действием сил неэлектростатической природы. Эти устройства называются *источниками тока* или *электрическими генераторами*.

Силы неэлектростатической природы, действующие на заряды в источнике тока, называются *сторонними силами*. Под их действием в источнике тока происходит перемещение зарядов в направлении, противоположном электростатическому полю.

В электрогенераторе эти силы возникают за счет механической энергии вращения ротора, в гальваническом элементе – за счет энергии химической реакции и т. д.

Источник тока характеризуется электродвижущей силой (ЭДС). ЭДС – *физическая величина, равная работе сторонних сил, совершаемой на данном перемещении единичного положительного заряда  $q_0$* :

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q_0}. \quad (8.2.1)$$

Поле сторонних сил  $\vec{F}_{ст}$  определяется напряженностью поля

$\vec{E}_{ст}$ :

$$\vec{E}_{CT} = \vec{F}_{CT} / q_0. \quad (8.2.2)$$

Работа, совершаемая  $\vec{F}_{CT}$  при перемещении заряда  $q_0$  по замкнутой цепи:

$$A_{CT} = \oint \vec{F}_{CT} d\vec{l} = q_0 \int \vec{E}_{CT} d\vec{l}. \quad (8.2.3)$$

Следовательно, ЭДС, согласно (8.2.1)

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{CT} d\vec{l}, \quad (8.2.4)$$

равна циркуляции вектора  $\vec{E}_{CT}$  по замкнутому контуру  $l$ .



Рис. 8.2.1

Заряд, движущийся на произвольном участке цепи, в общем случае находится под действием сил электростатического поля (кулоновских сил)  $\vec{F}_K$  и сторонних сил  $\vec{F}_{CT}$ , например, если участок содержит источник ЭДС. Участок цепи, содержащий источник ЭДС, называется *неоднородным* (см. рис. 8.2.1).

Результирующая сила, действующая на заряд на участке 1–2

$$\vec{F} = \vec{F}_K + \vec{F}_{CT}. \quad (8.2.5)$$

Работа этой силы на участке цепи 1–2

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_{CT} d\vec{l}, \\ \text{или} \\ A_{12} &= q_0 (\phi_1 - \phi_2) + q_0 \varepsilon_{12} = q_0 U_{12} \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

здесь  $(\phi_1 - \phi_2)$  – разность потенциалов на концах участка;  $\varepsilon_{12}$  – ЭДС, включенная на участке 1–2, величина

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 + \varepsilon_{12} = \frac{A_{12}}{q_0} \quad (8.2.7)$$

называется напряжением на участке 1–2.

*Напряжение* – физическая величина, равная работе кулоновских и сторонних сил, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи.

На однородном участке цепи  $\varepsilon_{12} = 0$ , и напряжение

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2, \quad (8.2.8)$$

$$dU = -d\phi, \text{ и } dU = Edl.$$

### **8.3. Закон Ома для однородного участка цепи.**

#### **Электрическое сопротивление проводника**

Сила тока в различных проводниках при одинаковом напряжении различна.

Закон Ома определяет силу тока в однородном металлическом проводнике в зависимости от напряжения и свойств проводника: сила тока в проводнике прямо пропорциональна напряжению  $U$  на концах проводника и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению проводника  $R$ :

$$I = \frac{U}{R}. \quad (8.3.1)$$

*Электрическое сопротивление проводника* характеризует его способность проводить ток и зависит от его размеров, формы и типа материала:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (8.3.2)$$

где  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $\rho$  – удельное сопротивление проводника.

*Удельное сопротивление* зависит от химической природы проводника, а также от температуры, и характеризует способность материала проводника проводить ток.

Значение  $\rho$  определяется величиной сопротивления проводника  $R$  при единичных значениях  $l$  и  $S$ .



Величина обратная  $\rho$ , называется *удельной проводимостью*  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (8.3.3)$$

Величина, обратная электрическому сопротивлению проводника называется *электрической проводимостью*  $G$  :

$$G = \frac{1}{R}. \quad (8.3.4)$$

Закон Ома для элементарного цилиндрического участка проводника длиной  $dl$  и сечением  $dS$ , по которому течет ток  $dI = jdS$ , при напряжении  $dU = E \cdot dl$ , можно записать в виде

$$jdS = \frac{Edl}{\rho \frac{dS}{dl}}, \quad (8.3.5)$$

или

$$j = \frac{1}{\rho} E = \gamma E.$$

Движение зарядов при прохождении тока в изотропном проводнике происходит в направлении вектора напряженности, поэтому направления векторов  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  совпадают. Тогда в векторной форме получим

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (8.3.6)$$

Формулы (8.3.5), (8.3.6) выражают закон Ома в *дифференциальной форме*.

Сопротивление проводника зависит от температуры  $t$  и для металлов в первом приближении имеет вид

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (8.3.7)$$

здесь  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления проводника.

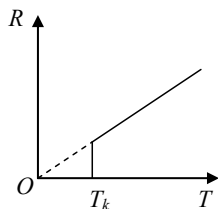


Рис. 8.3.1

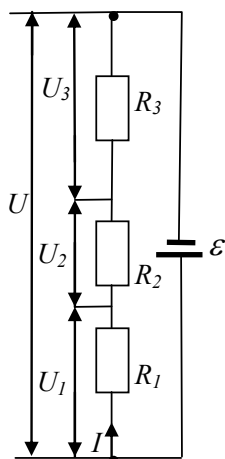


Рис. 8.3.2

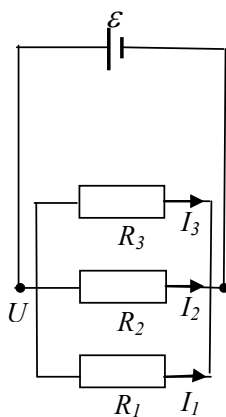


Рис. 8.3.3

Для чистых металлов  $\alpha \cong \frac{1}{273} K^{-1}$ , со-

ответственно формулы (8.3.7) можно записать в виде

$$R = R_0 \alpha T, \quad \rho = \rho_0 \alpha T, \quad (8.3.8)$$

где  $R_0$ ,  $\rho_0$  – сопротивление проводника и удельное сопротивление при  $t = 0^\circ C$ ,  $T = 273 + t$ .

Зависимость электрического сопротивления от температуры лежит в основе действия *термометров сопротивления*, позволяющих измерять температуру среды в большом диапазоне температур, с точностью до 0,003 К. Полупроводниковые термометры сопротивления или *термисторы*, имеют точность измерения  $10^{-6}$  К.

Многие металлы и их сплавы при низких температурах обладают свойством сверхпроводимости. *Сверхпроводимость* – резкое падение сопротивления проводника до нуля при некоторой критической температуре  $T_K$  (для различных металлов  $T_K = 0,14-20 K$ ) (см. рис. 8.3.1).

Высокотемпературная проводимость обнаружена у некоторых керамических материалов при  $T_K \approx 100 K$  и выше, что позволяет применять ее в практических целях.

Проводники в электрических цепях могут соединяться последовательно или параллельно.

При последовательном соединении сила тока постоянна в каждом проводнике (см. рис. 8.3.2).

При параллельном соединении проводников напряжение постоянно на каждом из них (см. рис. 8.3.3).

Применяя закон Ома, можно найти токи и напряжения на каждом проводнике, а также общее сопротивление участка, содержащего  $n$  проводников согласно табл. 8.3.1.

Таблица 8.3.1

<i>Тип соединения</i>	<i>Ток</i>	<i>Напряжение</i>	<i>Общее сопротивление участка</i>
Последовательное	$I_1 = I_2 =$ $= \dots I_n =$ $= I = const$	$U = \sum_{i=1}^n U_i$	$R = \sum_{i=1}^n R_i$
Параллельное	$I = \sum_{i=1}^n I_i$	$U_1 = U_2 =$ $= U_n =$ $= U = const$	$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$

#### 8.4. Работа тока, мощность. Закон Джоуля – Ленца

Работа тока, совершаемая при переносе заряда  $dq = Idt$  через поперечное сечение проводника, к концам которого приложено напряжение  $U$ , определяется в соответствии с (8.2.6):

$$dA = Udq = UI dt. \quad (8.4.1)$$

С учетом закона Ома элементарная работа тока

$$dA = UI dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (8.4.2)$$

Постоянный ток за время  $t$  совершает работу

$$A = UI t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (8.4.3)$$

Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (8.4.4)$$

Работа тока, проходящего по неподвижному металлическому проводнику, идет на его нагревание. По закону сохранения энергии количество теплоты  $dQ$ , выделившееся в проводнике, равно работе тока:

$$dQ = dA,$$

$$dQ = UI dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt, \quad (8.4.5)$$

что выражает закон Джоуля – Ленца: количество теплоты, выделяющейся в проводнике за время  $dt$ , пропорционально квадрату силы тока, электрическому сопротивлению и времени.

Закон Джоуля – Ленца имеет также дифференциальную форму. Количество теплоты  $dQ$  (8.4.5), выделившееся в элементарном цилиндрическом проводнике объемом  $dV = dS \cdot dl$ , можно представить в виде

$$dQ = UI dt = Edlj dS dt = Ej dV dt, \quad (8.4.6)$$

здесь  $I = jdS$ ,  $U = Edl$ ,  $dV = dS \cdot dl$ .

Величина, определяемая как отношение количества теплоты  $dQ$  к величине объема  $dV$ , в котором выделилось это количество теплоты в единицу времени, называется *удельной тепловой мощностью тока*:

$$w = \frac{dQ}{dV \cdot dt}. \quad (8.4.7)$$

Подставляя выражение  $dQ$  (8.4.6) в формулу (8.4.7), получим

$$w = Ej. \quad (8.4.8)$$

С учетом закона Ома в дифференциальной форме (8.3.5), удельная тепловая мощность примет вид

$$w = Ej = \gamma E^2 = \rho \cdot j^2, \quad (8.4.9)$$

что выражает закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

## 8.5. Обобщённый закон Ома

Рассмотрим неоднородный участок цепи с разностью потенциалов на концах  $(\phi_1 - \phi_2)$  и содержащий источник тока с ЭДС  $\varepsilon_{12}$  (см. рис. 8.5.1). Работа сторонних и электростатических сил на участке 1–2, совершаемая при перемещении заряда  $q_0$

$$A_{12} = q_0 \varepsilon_{12} + q_0 (\phi_1 - \phi_2) = q_0 U_{12}. \quad (8.5.1)$$

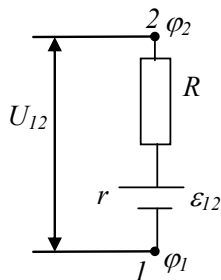


Рис. 8.5.1

Если ЭДС способствует движению зарядов в направлении 1–2, т. е. напряженность поля сторонних сил в источнике совпадает с направлением тока на участке, то  $\varepsilon_{12} > 0$ ; если препятствует, то  $\varepsilon_{12} < 0$ .

Совершенная работа равна количеству теплоты  $Q$ , выделившейся на участке. По закону (8.4.5)

$$Q = I^2 R_{12} \cdot t = IR_{12} (It) = IR_{12} q_0, \quad (8.5.2)$$

$$A = Q,$$

$$q_0 U_{12} = q_0 IR_{12},$$

$$IR_{12} = U_{12}.$$

Из этого следует

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{\phi_1 - \phi_2 + \varepsilon_{12}}{R_{12}}. \quad (8.5.3)$$

Выражение (8.5.3) есть закон Ома для *неоднородного участка цепи или обобщенный закон Ома*.

Частные случаи закона:

1.  $\varepsilon_{12} = 0$ , источника тока на участке нет. Получим

$$I = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = \frac{U_{12}}{R} = \frac{U}{R}, \quad (8.5.4)$$

закон Ома для однородного участка цепи.

2. Цепь замкнута,  $\phi_1 = \phi_2$ ,  $\phi_1 - \phi_2 = 0$ , из закона (8.5.3) следует

$$I = \frac{\varepsilon_{12}}{R+r} = \frac{\varepsilon}{R+r}, \quad (8.5.5)$$

здесь  $\varepsilon$  – ЭДС источника тока в цепи;  $r$  – внутреннее сопротивление источника;  $R$  – внешнее сопротивление цепи.

Цепь разомкнута,  $I = 0$ .

$$IR = U_{12} = 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 + \varepsilon_{12} &= 0, \\ \varepsilon &= |\phi_1 - \phi_2|, \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

это ЭДС источника тока равна разности потенциалов на его контактах (полюсах) при разомкнутой цепи.

## 8.6. Правила Кирхгофа. Расчёт разветвлённых цепей

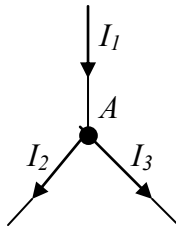


Рис. 8.6.1

Правила Кирхгофа позволяют упростить расчет разветвленных электрических цепей, содержащих несколько замкнутых контуров, в которых могут быть включены несколько источников тока.

Точка цепи, где сходятся не менее трех проводников, называется узлом. Ток, входящий в узел, считается положительным, а выходящий – отрицательным (см. рис. 8.6.1).

*Первое правило Кирхгофа:* алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (8.6.1)$$

$n$  – количество проводников (токов), сходящихся в узле.

Первое правило Кирхгофа следует из закона сохранения электрического заряда.

*Второе правило Кирхгофа:* в любом замкнутом контуре, произвольно взятом в разветвленной цепи, алгебраическая сумма

произведений сил токов  $I_i$  на соответствующие сопротивления  $R_i$  участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^K I_i R_i = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (8.6.2)$$

$K$  – число участков, на которые контур разделяется узлами;  $N$  – число ЭДС, включенных в контур.

Второе правило Кирхгофа является следствием обобщенного закона Ома.

В соответствии с правилами Кирхгофа определяется порядок расчета разветвленных электрических цепей:

1. Задать произвольное направление тока на каждом участке цепи.

2. Составить  $(m - 1)$  независимых уравнений по первому правилу Кирхгофа,  $m$  – число узлов в цепи.

3. Выбрать одинаковое направление обхода в каждом контуре; выделить контуры в разветвленной цепи.

Произведение силы тока  $I_i$  на электрическое сопротивление  $R_i$  соответствующего участка контура считается положительным,  $I_i R_i > 0$ , если ток  $I_i$  на данном участке совпадает с направлением обхода контура, и наоборот, это произведение считается отрицательным,  $I_i R_i < 0$ , если ток  $I_i$  на данном участке не совпадает с направлением обхода контура.

Электродвижущая сила  $\varepsilon_i$  (ЭДС), действующая на данном участке контура считается положительной,  $\varepsilon_i > 0$ , если эта ЭДС создает ток, совпадающий с направлением обхода контура.

4. Для каждого контура составить уравнения по второму правилу Кирхгофа.

Контуры выбирают так, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в ранее рассмотренный контур.

В систему уравнений должны входить все ЭДС и сопротивления рассматриваемой цепи. Общее число уравнений должно быть равно числу неизвестных величин.

В разветвленной цепи, состоящей из  $K$  – участков (между соседними узлами) и  $m$  – узлов, количество независимых уравнений по второму правилу равно  $(K - m + 1)$ .

**Пример.** Для данной цепи определить силы токов на всех участках.

Дано:  $\varepsilon_1 = 6\text{В}$ ,  $\varepsilon_2 = 12\text{В}$ ,  $r_1 = 2\text{Ом}$ ,  $r_2 = 4\text{Ом}$ ,  $R = 12\text{Ом}$ .

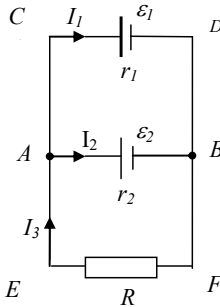


Рис. 8.6.2

Найти: токи  $I_1, I_2, I_3$ .

Решение: составим уравнения по правилам Кирхгофа.

Зададим направление обхода контуров по часовой стрелке; зададим направления токов на участках цепи (см. рис 8.6.2).

В соответствии с первым правилом Кирхгофа составим уравнение для узла A:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, I_3 - I_1 - I_2 = 0.$$

Составим уравнения по второму правилу Кирхгофа для контура ACDBFEA:

$$\sum_{i=1}^K I_i R_i = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i, I_1 r_1 + I_3 R = -\varepsilon_1.$$

Составим уравнения по второму правилу для контура ABFEA:

$$I_2 r_2 + I_3 R = -\varepsilon_2.$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_3 - I_1 - I_2 &= 0 \\ I_1 r_1 + I_3 R &= -\varepsilon_1 \\ I_2 r_2 + I_3 R &= -\varepsilon_2 \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений известными методами, находим величины сил токов на всех участках:  $I_1 = 0,6\text{А}$ ,  $I_2 = -1,2\text{А}$ ,  $I_3 = -0,6\text{А}$ .



## Глава 9. Электромагнитное поле

### 9.1. Магнитное поле. Основные свойства и характеристики

Магнитное поле – силовое поле, создаваемое электрическими токами, движущимися зарядами или постоянными магнитами и оказывающее силовое действие на другие токи, магниты, заряды, помещенные в это поле.

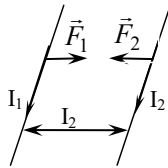


Рис. 9.1.1

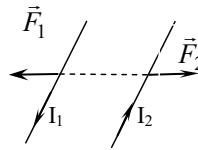


Рис. 9.1.2

Оно было открыто в результате экспериментов Ампера и Эрстеда в 1820 г.

Ампер установил, что электрические токи взаимодействуют между собой. Два параллельных проводника с токами притягиваются, если токи имеют одинаковое направление и отталкиваются, если – разное (см. рис. 9.1.1, 9.1.2). Он определил силу взаимодействия двух параллельных токов (см. гл. 9.4).

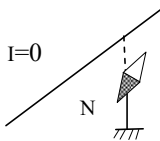


Рис. 9.1.3

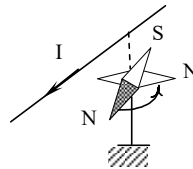


Рис. 9.1.4

Эрстед обнаружил, что поле постоянного тока оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку (см. рис. 9.1.3, 9.1.4). От этого эффекта произошел термин «магнитное поле».

Эти открытия показали, что электрические и магнитные явления взаимосвязаны. Однако, магнитное поле обладает рядом особых специфических свойств.

Магнитное поле, в отличие от электростатического, действует лишь на движущиеся электрические заряды и само создается движущимися зарядами (токами) как, например, в опытах Ампера.

Взаимодействие токов с магнитами объяснила гипотеза Ампера о микротоках. Гипотеза Ампера: в материальных телах существуют микротоки, создающие собственные микрополя, взаимодействующие с внешними полями

Микротоки или молекулярные токи создаются, в соответствии с современными представлениями, движущимися в атомах и молекулах электронами. Микротоки могут ориентироваться определенным образом во внешнем магнитном поле (поле макротоков), создавая собственное магнитное поле вещества.

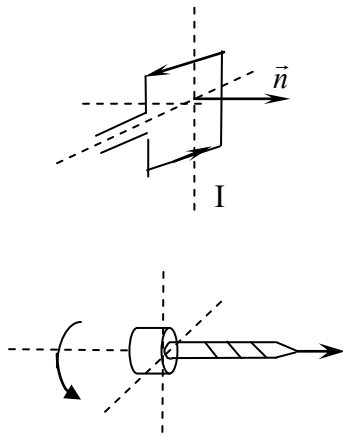


Рис. 9.1.5

Для исследования магнитного поля применяются магнитная стрелка, проводник с током или плоский контур (рамка) с током. Размеры контура должны быть малы по сравнению с расстоянием до токов, создающих поле.

Контур с током во внешнем магнитном поле поворачивается и устанавливается в определенном направлении.

Ориентация контура в пространстве определяется нормалью  $\vec{n}$  к плоскости контура, направление которой соответствует правилу

правого винта (см. рис. 9.1.5).

Основными силовыми характеристиками магнитного поля являются магнитная индукция  $\vec{B}$ , вращающий момент  $\vec{M}$  контура с током, напряженность поля  $\vec{H}$ .

Магнитная индукция поля  $\vec{B}$  – векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой поля.

Направление вектора  $\vec{B}$  определяется нормалью  $\vec{n}$  контура с током или направлением магнитной стрелки, находящейся в дан-

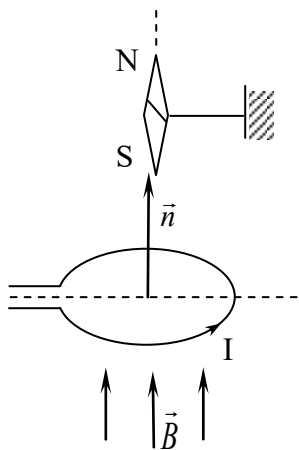


Рис. 9.1.6

здесь  $\vec{p}_m$  – магнитный момент контура;  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  (см. рис. 9.1.7).

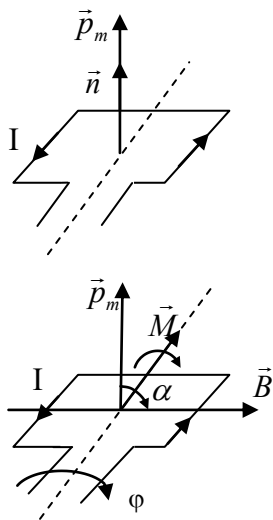


Рис. 9.1.7

ной точке поля, т. е. направлением силы, действующей на северный полюс стрелки (см. рис. 9.1.6).

Величина магнитной индукции может быть найдена с помощью вращающего момента  $\vec{M}$  рамки, законов Ампера, Био – Савара – Лапласа, силы Лоренца и др.

Вращающий момент  $\vec{M}$  – механический момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле  $\vec{B}$ , определяемый в виде векторного произведения

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad M = p_m B \sin \alpha, \quad (9.1.1)$$

Магнитный момент плоского контура с током  $I$  определяется по формуле

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (9.1.2)$$

где  $S$  – площадь контура;  $\vec{n}$  – орт нормали к контуру.

Направление вектора  $\vec{p}_m$  совпадает с  $\vec{n}$ , т. е. находится по правилу правого винта (рис. 9.1.7).

Магнитный момент пространственного контура

$$\vec{p}_m = I \int_S \vec{n} \cdot dS,$$

$dS$  – элемент поверхности  $S$ , натянутой на контур).

Максимальный момент контура

$$M_{\max} = p_m B, \quad \text{при значении } |\sin \alpha| = 1.$$

Тогда магнитная индукция в данной точке поле определяется в виде

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}, \quad (9.1.3)$$

и не зависит от выбора формы и размеров малой рамки. Свободный контур с током  $I$ , помещенный в магнитное поле  $\vec{B}$ , поворачивается в направлении действия момента  $\vec{M}$ .

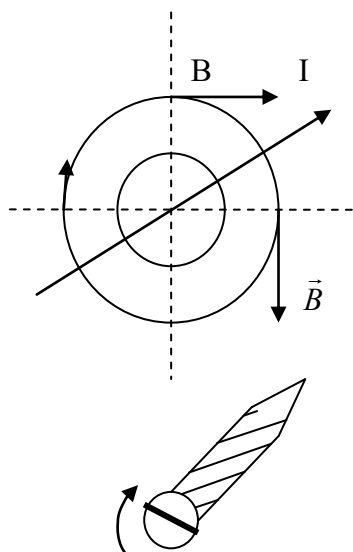


Рис. 9.1.8. Поле прямого тока

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  – силовая характеристика магнитного поля макроточек, связанная с магнитной индукцией в виде:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (9.1.4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \left( \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \right) \text{ – магнитная}$$

постоянная;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды, которая показывает, во сколько раз внешнее поле макроточек усиливается действием собственного суммарного поля микроточек среды (вещества).

Характеристики магнитного поля  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  аналогичны по назначению характеристикам электрического поля  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ .

Графически магнитное поле изображается линиями магнитной индукции, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  (см. рис. 9.1.8, 9.1.9).

Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводник с током или магнит, что отличает их от линий электрического поля, которые разомкнуты и направлены от положительных зарядов к отрицательным.

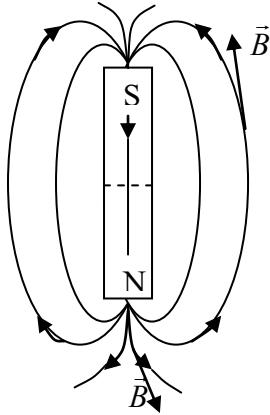


Рис. 9.1.9. Поле постоянного магнита

Направление вектора  $\vec{B}$  поля прямого тока определяется по правилу правого винта: винт движется в направлении тока, вектор  $\vec{B}$  направлен в сторону вращения головки винта.

Разделить полюса магнита, разрезая его на две части, нельзя, — возникает два новых магнита. Это подтверждает отсутствие в природе «магнитных зарядов», аналогов электрических зарядов, создающих электрическое поле. Поэтому линии магнитной индукции не прерываются на полюсах магнита, замыкаясь внутри него.

Для демонстрации линий магнитной индукции поля можно применить мелкие железные опилки: подобно маленьким магнитным стрелкам они располагаются вдоль линии поля.

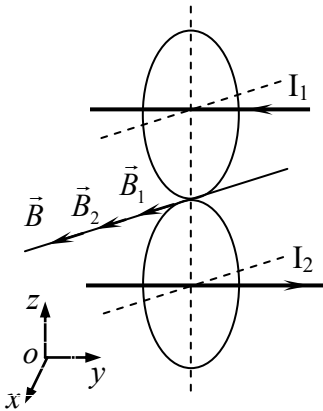


Рис. 9.1.10. Сложение полей двух параллельных токов

Магнитное поле называется *однородным*, если его индукция постоянна,  $\vec{B} = const$ . Силовые

линии однородного поля параллельны.

Магнитное поле  $\vec{B}$  подчиня-

ется принципу *суперпозиции*: магнитная индукция  $\vec{B}$  суммарного

поля, создаваемого несколькими токами (магнитами, движущимися зарядами) определяется векторной суммой магнитных индукций  $\vec{B}_i$  полей, создаваемых

каждым отдельным током:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_i \vec{B}_i, \quad (9.1.5)$$

$n$  – количество токов, т. е. количество складываемых отдельных полей (см. рис. 9.1.10).

## 9.2. Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры

Закон Био – Савара – Лапласа определяет элементарную индукцию  $d\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого элементом проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  (см. рис. 9.2.1) в некоторой точке  $A$  поля в виде

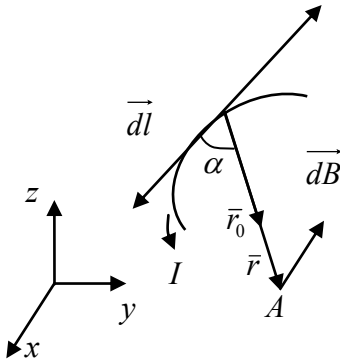


Рис. 9.2.1

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r}_0)}{r^2}, \quad (9.2.1)$$

$\vec{r}_0$  – единичный вектор радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного от элемента проводника  $d\vec{l}$  в точку  $A$ ,  $\vec{r}_0 = \vec{r} / r$ .

Величина магнитной индукции вычисляется в соответствии с правилом векторного произведения

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (9.2.2)$$

$\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

В соответствии с принципом суперпозиции (9.1.5) полная магнитная индукция  $\vec{B}$  поля, создаваемого проводником с током длиной  $l$ , вычисляется в виде интеграла

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}.$$

Примеры применения закона (9.2.1) даны ниже.

*Пример 1. Магнитное поле прямого тока.*

Рассматривается поле постоянного тока, идущего по тонкому прямолинейному бесконечному проводнику (рис. 9.2.2).

Для определения величины элементарной индукции  $d\vec{B}$  (9.2.2) в некоторой точке  $A$  поля необходимо выразить ее в виде функции одной переменной  $\alpha$ :

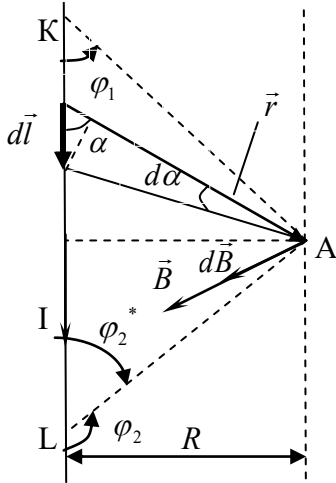


Рис. 9.2.2

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha},$$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \sin \alpha}{4\pi R} d\alpha. \quad (9.2.3)$$

Все векторы  $d\vec{B}$  элементов  $d\vec{l}$ , взятых в проводнике, направлены в точке  $A$  по одной прямой.

Магнитная индукция поля всего проводника в точке  $A$ :

$$B = \int_l dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \mu I \sin \alpha}{4\pi R} d\alpha = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}, \quad (9.2.4)$$

напряженность поля:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2\pi R}. \quad (9.2.5)$$

Для конечного проводника  $KL = l$  индукция поля в т.  $A$ :

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2). \quad (9.2.6)$$

Если  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ ,  $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R} \cos \phi$ .

*Пример 2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током.*

Рассматривается тонкий круговой проводник радиусом  $R$ , по которому течет постоянный ток  $I$ .

Величина индукции  $dB$  (9.2.2) в центре окружности  $O$  (см. рис. 9.2.3):

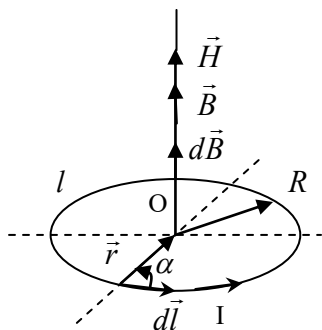


Рис. 9.2.3

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I dl}{4\pi R^2},$$

здесь  $r = R$ ,  $\sin \alpha = 1$ . Все элементарные векторы  $d\vec{B}$  направлены по одной прямой. Индукция поля всего кольцевого тока в т.  $O$

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int_l dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}, \quad (9.2.7)$$

напряженность поля в т.  $O$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2R}. \quad (9.2.8)$$

### 9.3. Магнитное поле движущегося заряда

Движущийся электрический заряд создает в окружающем пространстве магнитное поле. Магнитная индукция поля точечного заряда  $q$  в некоторой т.  $A$  определяется в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu q (\vec{v} \times \vec{r}_0)}{4\pi r^2}, \quad B = \frac{\mu_0 \mu q v \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (9.3.1)$$

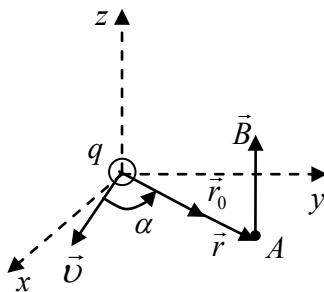


Рис. 9.3.1

$\vec{v}$  – скорость заряда;  $\vec{r}_0$  – единичный вектор радиус- вектора  $\vec{r}$  точки  $A$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{r}_0$  (рис. 9.3.1).

Выражение (9.3.1) справедливо при движении заряда с постоянной скоростью ( $v = \text{const}$ ), которая значительно меньше скорости света ( $v \ll c$ ), т. е. для нерелятивистского



заряда, электрическое поле которого можно считать электростатическим.

Поскольку электрический ток создается движущимися зарядами, между законами (9.2.1) и (9.3.1) выявляется аналогия

$$q\vec{v} = I\vec{dl}, \quad (9.3.2)$$

т. е. движущийся заряд создает магнитное поле, эквивалентное полю элементарного тока.

#### 9.4. Закон Ампера. Единицы измерения $\vec{B}$ и $\vec{H}$ .

##### Взаимодействие двух параллельных проводников с токами

Закон Ампера определяет элементарную силу  $d\vec{F}$ , действующую со стороны магнитного поля  $\vec{B}$  на элемент проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$ , в виде

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}), \quad dF = IdlB \sin \alpha, \quad (9.4.1)$$

где  $\alpha$  – угол между перемножаемыми векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  (см. рис. 9.4.1).

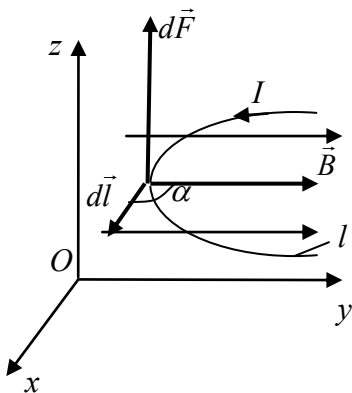


Рис. 9.4.1

Направление силы определяется в соответствии с правилом векторного произведения (правого винта). Его можно найти также по правилу левой руки: левая ладонь располагается так, чтобы вектор  $\vec{B}$  входил в ладонь, пальцы направлены вдоль элемента  $d\vec{l}$  проводника (в сторону тока  $I$ ), тогда отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы.

Полная сила Ампера, действующая на проводник с током длиной  $l$  равна сумме элементарных сил (9.4.1), действующих на все элементы проводника и находится в виде интеграла:

$$F = \int_l dF = \int_l IB \sin \alpha \cdot dl. \quad (9.4.2)$$

Если  $\vec{B} = const$ ,  $\alpha = const$ , то  $F = IBl \cdot \sin \alpha$ ; если  $\alpha = 90^\circ$ , то сила имеет максимальное значение

$$F_{\max} = IBl. \quad (9.4.3)$$

Закон Ампера применяется для определения единицы измерения силы тока (см. стандартное определение 1 ампера в гл. 8.1), а также единицы магнитной индукции. Из (9.4.3) следует

$$B = \frac{F_{\max}}{Il}, \quad [B] = \frac{[F_m]}{[I][l]}, \quad (9.4.4)$$

что и позволяет определить единицу измерения магнитной индукции – Тесла.  $[B] = 1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н/Ам}$ . 1 Тесла – индукция однородного магнитного поля, действующего с силой 1 Н на один метр длины прямолинейного проводника, перпендикулярного вектору  $\vec{B}$ , при силе тока в нем 1 А.

Из формулы (9.4.4) следует также физический смысл магнитной индукции: величина  $B$  численно равна силе, с которой магнитное поле действует на проводник с постоянным током, в расчете на единицу длины проводника и на единицу силы тока в нем (здесь рассматривается прямолинейный металлический тонкий проводник, поперечными размерами которого можно пренебречь).

Сила взаимодействия двух параллельных бесконечных про-

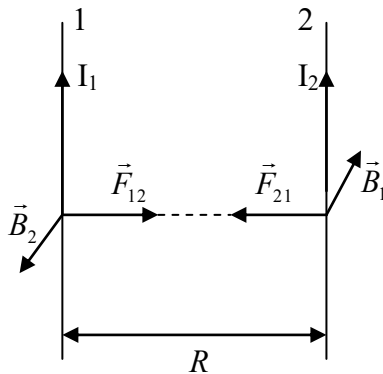


Рис. 9.4.2

водников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расстояния между которыми  $R$ , определяется из закона Ампера (9.4.1), (9.4.3) (см. рис. 9.4.2). Рассматриваются металлические проводники малого поперечного сечения.

Сила, действующая на участок проводника 2 длиной  $l$ , со стороны магнитного поля  $\vec{B}_1$ , создаваемого током  $I_1$ , согласно (9.4.3)

$$F_{21} = I_2 B_1 l .$$

Величина  $B_1$ , в соответствии с (9.2.4)

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi R} .$$

Получим

$$F_{21} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi R} . \quad (9.4.5)$$

Аналогично находим силу  $F_{12}$  действующую на участке проводника 1 длиной  $l$  со стороны магнитного поля  $B_2$  тока  $I_2$ :

$$F_{12} = I_1 B_2 l = \frac{\mu_0 \mu I_2 I_1 l}{2\pi \cdot R} . \quad (9.4.6)$$

Следовательно, проводники притягиваются между собой с одинаковой силой

$$F = F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 \mu I_2 I_1 l}{2\pi R} . \quad (9.4.7)$$

Сила Ампера в расчете на единицу длины проводника

$$F_{ed} = \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{R} . \quad (9.4.8)$$

Если токи  $I_1$  и  $I_2$  текут в разных направлениях, проводники отталкиваются с такой же силой.

### 9.5. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

*Сила Лоренца (магнитная сила)* – сила, действующая на электрический точечный заряд  $q$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле  $\vec{B}$ , определяемая в виде

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}), \quad F = qvB \sin \alpha , \quad (9.5.1)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  (см. рис. 9.5.1).

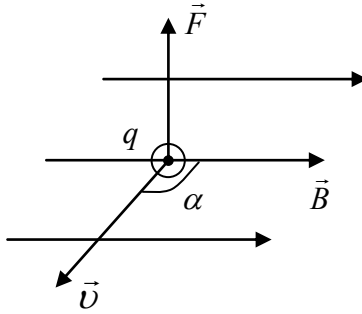


Рис. 9.5.1

Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения или по правилу правого винта для векторов  $\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}$ , а также по правилу левой руки.

Свойства магнитной силы:

- а) если заряд частицы  $q = 0$ , сила  $F = 0$ , т. е. на незаряженные частицы магнитное поле не действует;
- б) если  $v = 0$ ,  $F = 0$ , – на неподвижные заряды магнитное поле не действует;

в) если  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ , ( $\alpha = 0, 180^\circ$ ),  $F = 0$ , – на частицу, движущуюся вдоль линий магнитной индукции, поле не действует;

г) при изменении знака заряда  $q$  сила изменяет своё направление на противоположное, заряд в формуле силы – величина алгебраическая;

д) сила  $\vec{F} \perp \vec{v}$  – следовательно, магнитная сила работы не совершает и не изменяет величину скорости, т. е. кинетическую энергию частицы.

В общем случае, когда на частицу действует электрическое и магнитное поля, сила Лоренца определяется в виде суммы кулоновской силы  $\vec{F}_{эл}$  и магнитной силы  $\vec{F}_M$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_{эл} + \vec{F}_M = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (9.5.2)$$

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. При условии, что  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , частица движется под действием постоянной магнитной силы, перпендикулярной скорости (см. рис. 9.5.2):

$$F = qvB = const, \quad \vec{F} \perp \vec{v}.$$

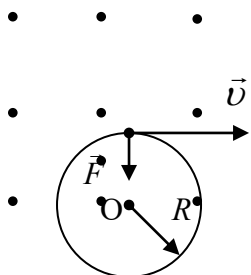


Рис. 9.5.2

Скорость частицы значительно меньше скорости света,  $v \ll c$ , частица нерелятивистская

Уравнение движения частицы массой  $m$  по закону Ньютона

$$ma_n = F, \quad \frac{mv^2}{R} = qvB. \quad (9.5.3)$$

Тогда

$$R = \frac{mv}{qB} = \text{const}, \quad (9.5.4)$$

т. е. частица движется по окружности радиусом  $R$ .

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad (9.5.5)$$

не зависит от скорости  $v$  и определяется величиной индукции  $B$  и удельного заряда частицы ( $q/m$ ).

Этот вид движения применяется в экспериментальных методах определения типа элементарных частиц, он используется также в циклических ускорителях заряженных частиц.

Движение заряженной частицы в магнитном поле ( $\vec{B} = \text{const}$ ) в случае, когда скорость  $\vec{v}$  составляет с вектором  $\vec{B}$  угол  $\alpha$ , рассматривается с разложением скорости на две составляющие (см. рис. 9.5.3):

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel, \quad (9.5.6)$$

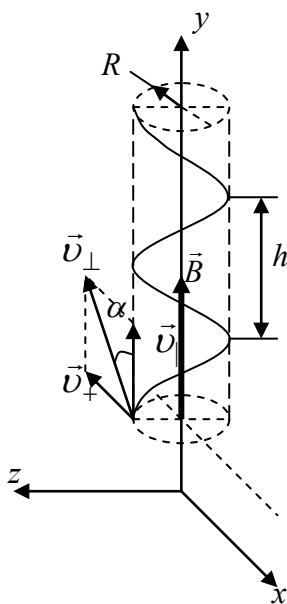


Рис. 9.5.3

составляющие (см. рис. 9.5.3):

здесь  $\vec{v} \perp \vec{B}$ ,  $v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha$ ,  $|\vec{v}_{\perp}| = const$ ,

$\vec{v}_{//} // \vec{B}$ ,  $v_{//} = v \cdot \cos \alpha$ ,  $\vec{v}_{//} = const$ .

Частица участвует в двух движениях:

1. Движение по окружности под действием магнитной силы с постоянной скоростью  $v_{\perp}$ , с радиусом и периодом обращения соответственно

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (9.5.7)$$

2. Прямолинейное равномерное движение частицы параллельно линиям магнитной индукции со скоростью  $v_{//}$ .

Результирующее движение частицы происходит по винтовой линии (спирали), шаг которой

$$h = v_{//}T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB}. \quad (9.5.8)$$

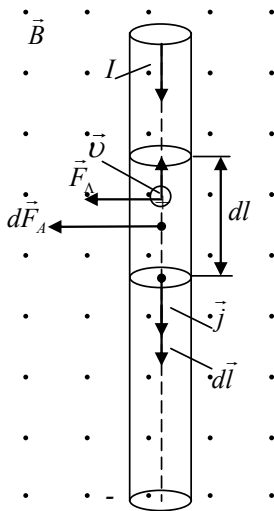


Рис. 9.5.4

При движении заряженной частицы в неоднородном магнитном поле, индукция которого возрастает в направлении движения, величина силы Лоренца возрастает, а величины  $R$ ,  $T$ ,  $h$  уменьшаются, т. е. спираль траектории частицы сжимается. Этот эффект применяется для фокусировки электронного пучка (луча), например, в электронно-лучевой трубке.

Закон Ампера и сила Лоренца взаимосвязаны. Сила, действующая на некоторый движущийся в проводнике заряд  $e$  во внешнем магнитном поле  $\vec{B}$

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Элемент проводника  $dl$  с током  $I$  содержит  $N$  зарядов (электронов) (см.

рис. 9.5.4):

$$N = nSdl = ndQ, \quad (9.5.9)$$

где  $n$  – концентрация свободных зарядов;  $S$  – площадь поперечного сечения проводника;  $dl$  – длина элемента;  $dQ$  – объем элемента проводника.

Магнитная сила, действующая на все  $N$  зарядов элемента проводника в поле  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= e(\vec{v} \times \vec{B})N = e(\vec{v} \times \vec{B})nSdl = \\ &= (\vec{j} \times \vec{B})Sdl = I(d\vec{l} \times \vec{B}), \end{aligned} \quad (9.5.10)$$

здесь  $\vec{j} = en\vec{v}$  – плотность тока;  $I = jS$ , – ток в проводнике;  $I d\vec{l} = \vec{j}Sdl$ , – вектор элемента проводника с током [7].

Правая часть выражения (9.5.10) представляет собой закон Ампера. На рис. 9.5.5 направление силы Лоренца определено с учетом того, что заряд  $e$  – отрицательный, скорость электрона направлена от отрицательного полюса к положительному. Направление тока показано в соответствии с общим правилом.

Направление силы Лоренца и Ампера совпадают.

Аналогично из закона Ампера можно получить формулу Лоренца.

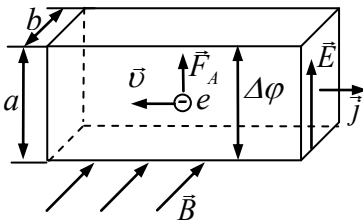


Рис. 9.5.5

**Эффект Холла:** возникновение в проводнике с током  $I$ , находящемся в магнитном поле  $\vec{B}$ , поперечного электрического поля  $\vec{E}$  с разностью потенциалов  $\Delta\phi$

$$F_q = F_L; \quad qE = qvB; \quad E = vB;$$

$$E = \frac{\Delta\phi}{a}; \quad \Delta\phi = vBa; \quad I = jS = env \cdot S; \quad S = ab; \quad v = \frac{I}{enS};$$

$$\Delta\phi = k \cdot \frac{IB}{b}; \quad k = \frac{1}{en} \text{ – постоянная Холла (см. рис. 9.5.5).}$$

## 9.6. Циркуляция вектора $\vec{B}$ . Закон полного тока в вакууме

Циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  есть интеграл по замкнутому контуру  $l$

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B dl \cos \phi = \oint_l B_l dl, \quad (9.6.1)$$

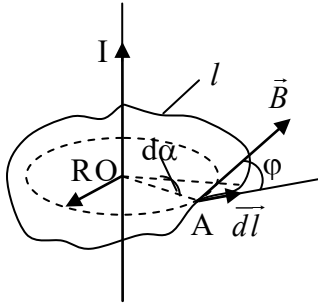


Рис. 9.6.1

где  $\phi$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ ;  $d\vec{l}$  – элемент контура, совпадающий с направлением обхода контура (см. рис. 9.6.1).

В отличие от циркуляции вектора  $\vec{E}$  напряженности электростатического поля (см. гл. 7.7), циркуляция  $\vec{B}$  не равна нулю.

Для определения циркуляции  $\vec{B}$  рассмотрим поле прямого тока в вакууме. Проводник с током  $I$  охватывается произвольным плоским контуром  $l$ .

Магнитная индукция поля прямого тока в вакууме в некоторой т.  $A$  (9.2.4)

$$B = \mu_0 I / (2\pi R),$$

где  $R$  – радиус окружности, проходящий через т.  $A$ ,  $\vec{B} \perp R$ ,  $\vec{B} \perp I$ .

Учитывая, что  $dl \cdot \cos \phi = dS = R \cdot d\alpha$ , ( $dS$  – элемент окружности радиусом  $R$ ) находим циркуляцию

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = B \oint_l dl \cos \phi = BR \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R 2\pi = \mu_0 I,$$

т. е.

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (9.6.2)$$



Циркуляция вектора  $\vec{B}$  поля прямого тока не зависит от формы и размеров контура  $l$  и определяется лишь величиной тока  $I$ , охватываемого контуром.

В общем случае, если контур  $l$  охватывает  $n$  токов, в соответствии с принципом суперпозиции суммарное поле

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i,$$

и его циркуляция

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l \sum_i \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_i \oint_l \vec{B}_i d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (9.6.3)$$

Формула (9.6.3) выражает собой закон полного тока в вакууме: циркуляция вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в вакууме по произвольному замкнутому контуру  $l$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на постоянную  $\mu_0$ .

Каждый ток в формуле циркуляции учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром.

Поле, циркуляция которого не равна нулю, называется *вихревым*.

*Теорема Стокса:* циркуляция вектора  $\vec{a}$  по замкнутому контуру  $l$  равна потоку вектора  $rot \vec{a}$  через поверхность  $S$ , натянутую на контур:

$$\oint_l \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S rot \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{S},$$

где  $rot \vec{a}$  – ротор вектора  $\vec{a}$ ;  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  есть оператор Гамильтона.

$$rot \vec{a} = \vec{i} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \times \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right),$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты осей координат  $x, y, z$ .

Закон полного тока имеет дифференциальную форму. Выразим полный ток в виде

$$\sum_i I_i = \int_S \vec{j} \vec{n} dS, \quad (9.6.4)$$

где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока;  $S$  – поверхность, натянутая на контур. Тогда циркуляция

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \vec{n} dS. \quad (9.6.5)$$

Левую часть преобразуем по теореме Стокса:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) d\vec{S},$$

здесь  $(\nabla \times \vec{B}) = \text{rot} \vec{B}$  – форма записи ротора с помощью оператора  $\vec{\nabla}$ .

Получим

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (9.6.6)$$

Следовательно

$$(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{или} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (9.6.7)$$

что является выражением закона полного тока в вакууме в дифференциальной форме: ротор вектора  $\vec{B}$  прямо пропорционален вектору плотности тока  $\vec{j}$ .

Рассмотрим примеры применения закона полного тока.

*Пример 1.* Поле прямого тока.

Найдем индукцию магнитного поля прямого тока  $I$ . Ток охватывается замкнутым контуром  $l$  в виде окружности радиуса  $R$  (рис. 9.6.2). Учитывая, что вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к контуру ( $\phi = 0$ ), величина  $B = \text{const}$ , получим

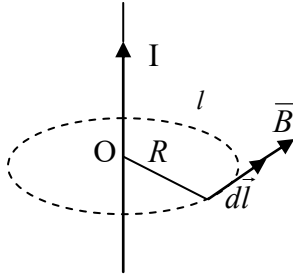


Рис. 9.6.2

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B dl \cos \phi = B 2\pi R = \mu_0 I.$$

Следовательно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (9.6.8)$$

что совпадает с формулой (9.2.4) для вакуума.

Пример 2. Поле соленоида и тороида.

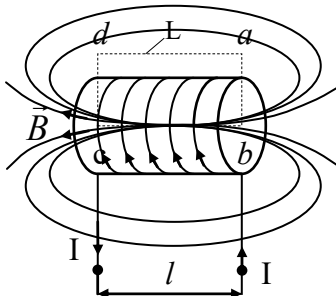


Рис. 9.6.3

Магнитное поле соленоида (катушки), с током  $I$  сосредоточено практически внутри его объема и считается однородным,  $\vec{B} = const$ .

Для определения величины  $\vec{B}$  построим замкнутый контур  $L$  в виде прямоугольника  $abcd$  и найдем циркуляцию  $\vec{B}$  (см. рис. 9.6.3):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = Bl = \mu_0 IN, \quad (9.6.9)$$

т.к. на участке  $bc$   $B_l = B$ , на участках  $ab$  и  $cd$   $B_l = 0$  ( $\phi = 90^\circ$ ), на участке  $da$   $B_l \approx 0$  (поле снаружи катушки  $B \approx 0$ ). Тогда

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (9.6.10)$$

Поле соленоида:  $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$ , где  $N$  – количество витков проводника с током  $I$ ;  $l$  – длина соленоида.

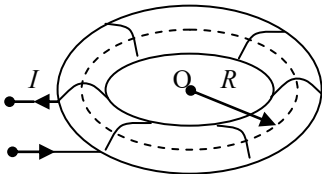


Рис. 9.6.4

Аналогично определяется магнитное поле внутри тороидальной катушки (см. рис. 9.6.4):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}, \quad (9.6.11)$$

где  $R$  – средний радиус тороида.

### 9.7. Поток вектора $\vec{B}$ . Теорема Остроградского – Гаусса для магнитного поля

Элементарный поток вектора  $\vec{B}$  через площадку  $dS$  (см. рис. 9.7.1)

$$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S} = \vec{B}\vec{n}dS = B \cos\alpha dS = B_n dS. \quad (9.7.1)$$

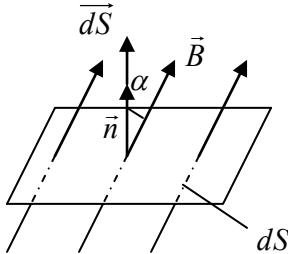


Рис. 9.7.1

Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность  $S$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (9.7.2)$$

В случае, когда  $B_n = const$ , магнитный поток  $\Phi_B = B_n S$ .

Теорема Остроградского – Гаусса для магнитного поля: **поток вектора  $\vec{B}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:**

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (9.7.3)$$

Этот результат следует из того, что линии магнитной индукции всегда замкнуты, вследствие отсутствия в природе «магнитных зарядов», поэтому полный поток  $\Phi_B$  сквозь замкнутую поверхность обращается в ноль. Этим магнитное поле (вихревое) отличается от электростатического (потенциального).

Теорема (9.7.3) имеет дифференциальную форму записи. Преобразуем левую часть (9.7.3) в соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = \int_V \nabla \vec{B} dV, \quad (9.7.4)$$

где  $V$  – объем поля, (пространства), ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ .

Поскольку  $\Phi_B = 0$  (9.7.3), то

$$\nabla \vec{B} = 0, \quad (9.7.5)$$

где дивергенция вектора  $\operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$  равна нулю.

Формула (9.7.5) является дифференциальной формой теоремы (9.7.3).

## 9.8. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца

*Электромагнитная индукция* – явление, состоящее в том, что в замкнутом проводящем контуре в магнитном поле при изменении потока магнитной индукции сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток, называемый индукционным.

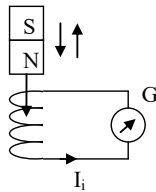


Рис. 9.8.1

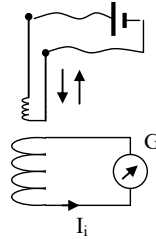


Рис. 9.8.2

Существование индукционного тока обусловлено появлением в контуре электродвижущей силы – ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ .

Это явление было открыто Фарадеем в 1831 г. в результате известных экспериментов, ставших классическими (см. рис. 9.8.1, 9.8.2).

Опыты показали, что:

- индукционный ток  $I_i$  увеличивается с ростом скорости движения магнита или катушки;
- ток  $I_i$  изменяет направление при изменении полюсов магнита или направление его движения;
- индукционный ток возникает при перемещении катушек, а также при включении или выключении тока в малой катушке, питаемой от источника тока.

Фарадей в результате экспериментов открыл закон электромагнитной индукции: ЭДС электромагнитной индукции в конту-

ре равна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, взятой с обратным знаком:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.8.1)$$

Общее правило определения индукционного тока дал Ленц (1833): индукционный ток направлен так, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

Математически правило Ленца выражено отрицательным знаком в законе (9.8.1).

В соленоиде, состоящем из  $N$  витков проводника, полная ЭДС электромагнитной индукции равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом витке проводника:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{ik} = -\sum_k \frac{d\Phi_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_k \Phi_k = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (9.8.2)$$

$$\psi = \sum_k \Phi_k = N\Phi,$$

где  $\psi$  – полный магнитный поток сквозь соленоид (потокосцепление).

Причина возникновения ЭДС  $\varepsilon_i$  в движущемся проводнике: при движении проводника в магнитном поле свободные заряды под действием силы Лоренца перемещаются, создавая разность потенциалов и индукционный ток  $I_i$ .

Возникновение  $\varepsilon_i$  в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле (при изменении магнитного потока), когда сила Лоренца равна нулю, объясняется гипотезой Максвелла о том, что переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое вихревое поле, создающее в контуре ЭДС индукции  $\varepsilon_i$  и индукционный ток.

Сила тока  $I_i$  находится из закона Ома:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R},$$

где  $R$  – сопротивление контура.

## 9.9. Вращение рамки в магнитном поле

Открытие явления электромагнитной индукции (ЭМИ) стало результатом поисков обратной связи между магнитными и электрическими явлениями. Оно позволило создать ряд электрических машин и устройств, имеющих огромное применение в технике: генераторы переменного и постоянного тока, электродвигатели, трансформаторы и многие другие.

Закон электромагнитной индукции лежит в основе принципа работы электрического генератора, – машины, позволяющий получать электрический ток посредством преобразования механической энергии вращения ротора в электрическую энергию.

Принцип действия генератора рассматривается на примере вращения рамки в однородном магнитном поле ( $\vec{B} = const$ ) с постоянной угловой скоростью ( $\omega = const$ ).

Магнитный поток, пронизывающий рамку

$$\Phi = B_n S = B \cos \phi S = BS \cos \omega t, \quad (9.9.1)$$

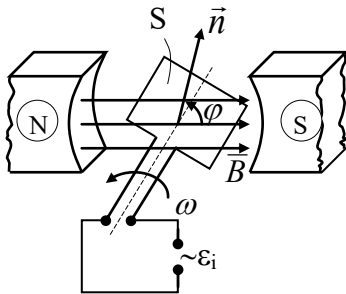


Рис. 9.9.1

где  $S$  – площадь поверхности, ограниченной рамкой;  $\phi = \omega t$  – угол поворота рамки (см. рис. 9.9.1).

Вследствие электромагнитной индукции в рамке возникает ЭДС

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \epsilon_m \sin \omega t, \quad (9.9.2)$$

$\epsilon_m = BS\omega$  – максимальное значение ЭДС в рамке.

Величина  $\epsilon_i$  изменяется по гармоническому закону. В замкнутой цепи возникает переменный электрический ток.

Величина  $\epsilon_m$  зависит от значений  $B, S, \omega$ . Поэтому увеличение ЭДС осуществляется с помощью:

- усиления магнитного поля  $\vec{B}$ , для чего используются мощные постоянные магниты или электромагниты;
- увеличения числа витков проводника, что увеличивает площадь  $S$  и потокосцепление.

Величина  $\omega$  в обычных электросетях – стандартная, соответствующая частоте переменного тока  $\nu = 50$  Гц.

Возможен и обратный процесс: при пропускании тока по рамке, находящейся в магнитном поле, на нее действует вращающий механический момент (п. 3.1), заставляющий вращаться ротор электрической машины, состоящий из многих витков проводника.

Это явление лежит в основе принципа действия электродвигателей

### 9.10. Вихревые токи

*Вихревые токи* (токи Фуко) – индукционные токи, создаваемые в массивных сплошных проводниках под действием переменного магнитного поля.

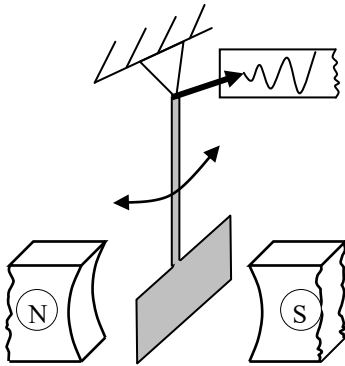


Рис. 9.10.1

Эти токи замыкаются внутри проводника и поэтому являются вихревыми. Их направление также подчиняется правилу Ленца, т. е. они противодействуют изменению внешнего поля.

Поскольку сопротивление таких проводников мало, вихревые токи достигают большой величины, что приводит к нагреву проводника.

Вихревые токи имеют различное применение:

- индукционная печь-катушка с током большой частоты, внутри которой помещается тигель с металлом. Вихревые токи, возникающие в металле, разогревают его до плавления; это позволяет плавить металл в вакууме и получать сверхчистые материалы;



– демпфирование колебаний – гашение колебаний металлического массивного маятника, помещенного между полюсами электромагнита. Вихревые токи создают собственное поле, противодействующее полю электромагнита, в результате маятник быстро тормозится под действием возникающих сил. Такой способ гашения колебаний применяется в некоторых приборах (сейсмограф и др.) (см. рис. 9.10.1).

Вихревые токи вызывают нагрев сердечников трансформаторов, якорей электрогенераторов. Для уменьшения нагрева их изготавливают из тонких пластин металла, разделенных между собой слоем изолятора (лака).

Скин-эффект – разогревание поверхностного слоя проводника при помощи токов высокой частоты, вытесняемых на поверхность вихревыми токами

### 9.11. Индуктивность контура. Самоиндукция

Магнитное поле  $\vec{B}$  тока, текущего в замкнутом контуре, согласно закону (3.2.1) пропорционально току  $I$ , следовательно, магнитный поток, пронизывающий сам этот контур, пропорционален току,

$$\Phi = LI, \quad (9.11.1)$$

где  $L$  – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью контура (проводника).

При изменении собственного магнитного потока  $\Phi$  в контуре индуцируется ЭДС. Явление возникновения ЭДС индукции в контуре при изменении силы тока в нем называется *самоиндукцией*.

ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$  по закону (9.8)

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \quad (9.11.2)$$

Если индуктивность контура не изменяется,  $L = const$ , ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (9.11.3)$$

Отрицательный знак, соответствующая правилу Ленца, показывает, что индуктивность контура  $L$  замедляет изменение тока в нем, т. е. контур имеет электрическую инертность, противодействующую процессу изменения тока.

Для соленоида полное потокосцепление, в соответствии с (9.6.10),

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu_0\mu N^2 IS / l, \quad (9.11.4)$$

где  $S$  – площадь сечения катушки;  $N$  – число витков проводника;  $l$  – длина катушки;  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника катушки (см. гл. 9.1).

Выражая потокосцепление аналогично (9.11.1), получим для соленоида

$$\Psi = LI,$$

$$L = \mu_0\mu N^2 S / l = \mu_0\mu n^2 l S, \quad (9.11.5)$$

где  $n = N / l$ , – число витков на единицу длины катушки.

## 9.12. Работа и энергия магнитного поля

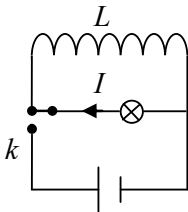
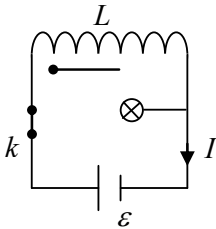


Рис. 9.12.1

Магнитное поле, как всякое силовое поле, способно совершать работу и характеризуется определенной энергией.

Работа, совершаемая магнитным полем, может быть определена с помощью электрической цепи, содержащей соленоид  $L$  (см. рис. 9.12.1). При замкнутом ключе  $k$  по катушке течет ток  $I$ , создающий в окружающем пространстве магнитное поле.

После размыкания ключа через сопротивление  $R$  (лампочка) некоторое время проходит убывающий ток  $I$ , поддерживаемый возникающий ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$ , т. е.

за счет энергии магнитного поля катушки.

Работа этого тока

$$dA = \varepsilon_s dq = \varepsilon_s Idt = -\frac{d\Phi}{dt} Idt = +Id\Phi. \quad (9.12.1)$$

Поскольку  $d\Phi = LdI$ , то

$$dA = -LIdI.$$

Полная работа, совершенная током

$$A = -\int_I^0 LIdI = \frac{1}{2}LI^2, \quad (9.12.2)$$

здесь  $I$  – первоначальное значение тока.

Энергия магнитного поля равна работе, совершенной током  $I$  при создании этого поля

$$W = \frac{1}{2}LI^2. \quad (9.12.3)$$

Энергия магнитного поля соленоида, имеющего индуктивность  $L$  (9.11.5)

$$W = \frac{1}{2}\mu_0\mu \frac{N^2}{l}SI^2. \quad (9.12.4)$$

Индукция поля катушки с сердечником, магнитная проницаемость которого  $\mu$ ,

$$B = \mu_0\mu NI / l, \quad (9.12.5)$$

тогда ток

$$I = \frac{Bl}{\mu_0\mu N},$$

и энергия поля, с учетом формулы  $B = \mu_0\mu H$ , примет вид

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0\mu} SI = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0\mu} V = \frac{1}{2} BHV, \quad (9.12.6)$$

$V = SI$  – объем поля соленоида.

Магнитное поле локализовано внутри соленоида и однородно. Оно характеризуется объемной плотностью энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 = \frac{1}{2}BH. \quad (9.12.7)$$

Аналогично определяется плотность энергии любого магнитного поля, в том числе и переменного электромагнитного.

### 9.13. Магнитный момент электрона, атома и молекулы

Все вещества, помещенные во внешнее магнитное поле, намагничиваются, т. е. становятся магнетиками, обладающими собственным магнитным полем.

Возникновение собственного магнитного поля вещества объяснялось гипотезой Ампера о существовании в любом теле микротоков, создающих суммарное поле вещества.

Появление планетарной модели атома Резерфорда и последующие открытия позволяли количественно объяснить механизм намагничивания вещества.

Электрон, движущийся вокруг атомного ядра, по круговой (приближенно) орбите, эквивалентен круговому току  $I$ . Поэтому он имеет *орбитальный магнитный момент*

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad p_m = IS = evS, \quad (9.13.1)$$

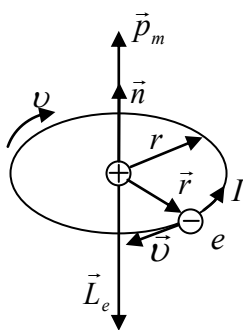


Рис. 9.13.1

здесь  $I = q/T = ev$ , – микроток;  $\nu, T$  – частота и период вращения электрона по орбите;  $S = \pi r^2$  – площадь орбиты радиусом  $r$  (см. рис. 9.13.1).

Направление тока противоположно направлению движения электрона.

Электрон имеет также механический момент импульса – *орбитальный механический момент*

$$\vec{L}_e = \vec{r} \times m\vec{v},$$

$$L_e = mvr = m2\pi\nu r^2 = 2m\nu S, \quad (9.13.2)$$

т. к.  $V = \omega r = 2\pi\nu r$ .

Эти моменты связаны между собой:

$$\vec{p}_m = g\vec{L}_e, \quad g = -\frac{e}{2m}, \quad (9.13.3)$$

где  $g$  – гиромагнитное отношение орбитальных моментов электрона; отрицательный знак здесь показывает, что векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_e$  направлены в разные стороны.

Величина  $g$  постоянна для всех орбит электрона. Формула (9.13.3) справедлива и для эллиптических орбит.

Электрон обладает также *собственным механическим моментом импульса*  $\vec{L}_{es}$  (*спин*). Это особое независимое свойство электрона, подобно тому, какими являются масса и заряд.

Спину электрона соответствует *спиновый магнитный момент*  $p_{ms}$ ,

$$\vec{p}_{ms} = g_s \vec{L}_{es}, \quad (9.13.4)$$

$g_s = -e/m$ , – гиромагнитное отношение спиновых моментов,

$$g_s = 2g.$$

Проекция *спинового магнитного момента* на направление внешнего поля  $\vec{B}$  принимает только одно из двух значений

$$p_{ms_b} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm |g| \hbar = \pm \mu_B, \quad (9.13.5)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , – *постоянная Планк*;  $\mu_B$  – *магнетон Бора*,

$$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}, \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

$$L_{e_b} = \frac{\sqrt{3}}{2} h \text{ – величина спина электрона.}$$

$$L_{e_b} = \pm \frac{h}{2} \text{ – проекция спина на направление внешнего поля.}$$

Магнетон Бора – единица магнитного момента электрона.

Общий магнитный момент электрона равен сумме его орбитального и *спинового магнитных моментов*:

$$\vec{p}_{me} = \vec{p}_m + \vec{p}_{ms}. \quad (9.13.6)$$

Общий магнитный момент атома, содержащего  $n$  электронов, равен сумме магнитных моментов электронов:

$$\vec{P}_{ma} = \sum_{i=1}^n (\vec{P}_{me})_i = \sum_{i=1}^n (\vec{P}_m)_i + \sum_{i=1}^n (\vec{P}_{ms})_i. \quad (9.13.7)$$

При этом магнитный момент ядра атома не учитывается, т. к. величина его на несколько порядков ниже величины  $P_{me}$ .

Аналогично определяется магнитный момент молекулы вещества.

#### 9.14. Намагниченность. Магнитное поле в среде. Условия на границе двух магнетиков

Количественной мерой магнитных свойств вещества является намагниченность.

*Намагниченность* – физическая величина, равная магнитному моменту единицы объема вещества:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V}, \quad \vec{P}_m = \sum_i (\vec{P}_{ma})_i, \quad (9.14.1)$$

$\vec{P}_m$  – магнитный момент вещества, равный сумме магнитных моментов  $\vec{P}_m$  всех атомов в объеме  $V$ .

Магнитное поле  $\vec{B}$  в среде (веществе) складывается из двух полей: внешнего поля  $\vec{B}_0$ , создаваемого в вакууме током проводимости (макротоком), и поля  $\vec{B}^*$  вещества, создаваемого атомно-молекулярными токами:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}^*. \quad (9.14.2)$$

Для характеристики магнитного поля вводится дополнительная величина – напряженность поля  $\vec{H}$ . Она позволяет упростить определение магнитного поля в среде. Поле в вакууме и напряженность связаны соотношением

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \quad (9.14.3)$$

Поле среды  $\vec{B}^*$  определяется ее намагниченностью

$$\vec{B}^* = \mu_0 \vec{J}, \quad (9.14.4)$$

что можно доказать теоретически и экспериментально. Поэтому поле в среде

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (9.14.5)$$

Опыт показывает, что при невысоких значениях напряженности существует линейная зависимость между намагниченностью вещества и напряженностью поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (9.14.6)$$

$\chi$  – магнитная восприимчивость вещества (безразмерный коэффициент).

Следовательно, магнитная индукция поля в среде

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \text{ или } \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu \vec{B}_0, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}, \quad (9.14.7)$$

$\mu = 1 + \chi$  – магнитная проницаемость вещества.

Закон полного тока (см. гл. 3.6) для магнитного поля в среде примет вид

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I^*), \quad (9.14.8)$$

$I$  – алгебраическая сумма макротоков;  $I^*$  – алгебраическая сумма микротоков, т. е. атомно-молекулярных токов, охватываемых контуром  $l$ .

Поскольку формула (9.14.8) требует определения микротоков, применение ее в таком виде затруднено.

Упростить вычисления позволяет применение напряженности поля  $\vec{H}$ . Можно доказать, что циркуляция вектора намагниченности  $\vec{J}$  по замкнутому контуру  $l$  равна сумме микротоков  $I^*$ :

$$\oint_l \vec{J} d\vec{l} = I^*. \quad (9.14.9)$$

Формула (9.14.8), согласно (9.14.5), примет вид:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \oint_l (\vec{H} + \vec{J}) d\vec{l} = \mu_0 (I + I^*), \quad (9.14.10)$$

и с учетом (14.9) получим запись закона полного тока в веществе:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (9.14.11)$$

Циркуляция напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля по замкнутому контуру  $l$  равна алгебраической сумме макротоксов охватываемых контуром

При переходе магнитного поля через границу двух магнетиков, имеющих магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , его характеристики изменяются.

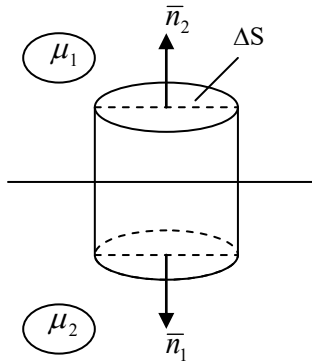


Рис. 9.14.1

Определим соотношения между значениями индукции  $B_1$  и  $B_2$  и напряженности  $H_1$  и  $H_2$  в первой и второй средах.

1. По теореме Гаусса (см. гл. 7.7) для элементарного цилиндра с основанием  $\Delta S$ , пересекающего границу двух однородных магнетиков, можно записать (рис. 9.14.1)

$$B_{n_1} \Delta S - B_{n_2} \Delta S = 0,$$

Следовательно

$$B_{n_1} = B_{n_2}, \mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2}, \frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (9.14.12)$$

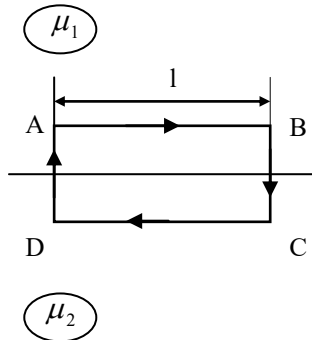


Рис. 9.14.2

2. По закону полного тока (рис. 9.14.2),

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

т. к. токов проводимости на границе нет.

Тогда

$$H_{\tau_2} l - H_{\tau_1} l = 0,$$



$$H_{\tau_2} = H_{\tau_1}, \quad \frac{B_{\tau_2}}{\mu_2} = \frac{B_{\tau_1}}{\mu_1}, \quad \frac{B_{\tau_2}}{B_{\tau_1}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (9.14.13)$$

Следовательно:

1) на границе двух однородных магнетиков нормальная составляющая  $B_n$  вектора  $\vec{B}$  и тангенциальная составляющая  $H_\tau$  вектора  $\vec{H}$  не претерпевают скачка (изменяются непрерывно вдоль линии поля);

2) касательная составляющая  $B_\tau$  и нормальная составляющая  $H_n$  изменяются скачком;

3) соотношение между углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  между векторами

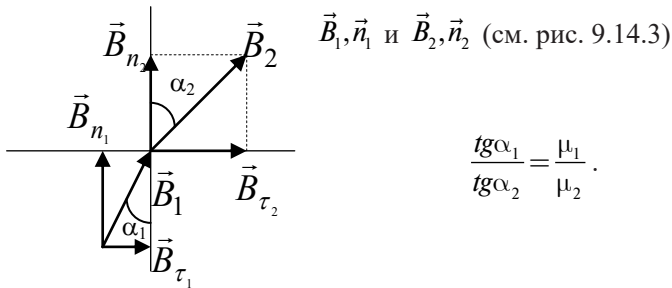


Рис. 9.14.3

## 9.15. Диамагнетики и парамагнетики. Ферромагнетики

Все вещества по степени намагничивания делятся на слабомагнитные и сильномагнитные. К слабомагнитным относятся диа- и парамагнетики, к сильномагнитным – ферромагнетики, ферриты.

*Диамагнетики* – вещества, собственное поле которых при намагничивании направлено противоположно внешнему полю, ослабляя его.

Атомы диамагнетика при отсутствии внешнего магнитного поля не имеют собственного магнитного момента ( $\vec{p}_{ma} = 0$ ), т. к. сумма орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов равна нулю.

Внешнее магнитное поле индуцирует в атоме дополнительные микротоки, создающие собственный магнитный момент  $\vec{p}_{ma}$  атома, который по правилу Ленца, направлен против внешнего поля. Суммарный магнитный момент всех атомов  $\vec{P}_m$  направлен против внешнего поля и ослабляет его.

К диамагнетикам относятся: металлы *Gu, Ag, Au, Bi*; углерод и большинство органических соединений.

Все вещества в той или иной степени подвержены диамагнитному эффекту.

Коэффициент  $\chi$  – магнитная восприимчивость, для диамагнетиков отрицателен, имеет очень малые величины:  $\chi \approx 10^{-6} \dots 10^{-4}$ , т. е.  $\chi < 0, \mu < 1$  для диамагнетиков, для меди  $\chi \approx 10^{-7}$ .

*Парамагнетики* – вещества, собственное поле которых при намагничивании совпадает с внешним полем, усиливая его.

Атомы парамагнетика при отсутствии внешнего магнитного поля обладают собственным магнитным моментом,  $\vec{p}_{ma} \neq 0$ , однако, суммарный магнитный момент парамагнетика отсутствует вследствие разориентирующего действия теплового движения атомов (молекул) вещества, т. е.  $\vec{P}_m = 0$ .

Под действием внешнего магнитного поля все магнитные моменты атомов ориентируются по направлению поля. Создается суммарный магнитный момент парамагнетика  $\vec{P}_m$ , совпадающий с внешним полем и усиливающий его.

К парамагнетикам относятся металлы *Al, Pt*, а также редкоземельные металлы (лантаноиды и др.)

Парамагнитный эффект значительно интенсивнее диамагнитного, поэтому последний в парамагнетике не проявляется.

Для парамагнетиков магнитная восприимчивость положительна ( $\chi \approx 10^{-4}$ ), т. е.  $\chi > 0, \mu > 1$ , (для алюминия  $\chi \approx 2 \cdot 10^{-5}$ ).

*Ферромагнетики* – сильномагнитные вещества, обладающие самопроизвольной намагниченностью при отсутствии внешнего магнитного поля (магниты).

Ферромагнетик имеет доменную структуру. Домен – область самопроизвольной намагниченности вещества. Размер домена

$10^{-2} \dots 10^{-4}$  см. Он представляет собой поликристаллическое зерно металла.

Ферромагнетиками являются металлы: железо, кобальт, никель, гадолиний, их сплавы и соединения.

Атомы ферромагнетика в отсутствии внешнего поля обладают магнитными моментами, которые ориентируются параллельно друг другу, образуя области самопроизвольной намагниченности – *домены*.

Магнитные свойства атомов ферромагнетиков определяются спиновыми магнитными моментами электронов  $p_{ms}$ . В кристаллических веществах, атомы которых имеют недостроенные внутренние электронные оболочки с нескомпенсированными спинами, возникают так называемые обменные силы, имеющие квантовую природу, которые ориентируют  $\vec{p}_{ms}$  электронов в некотором направлении в границах домена.

В отсутствие внешнего поля магнитные моменты доменов расположены хаотично, так, что в целом магнитный момент ферромагнетика равен нулю,  $\vec{p}_m = 0$ .

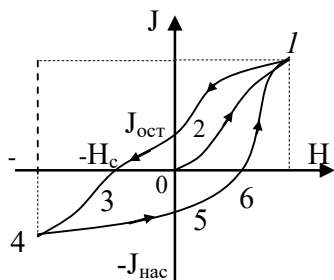


Рис. 9.15.1. Петля магнитного гистерезиса:  
 – магнитное насыщение ферромагнетика;  
 – остаточная намагниченность;  
 $H_c$  – коэрцитивная сила (напряженность размагничивания)

Внешнее магнитное поле ориентирует магнитные моменты доменов по полю, поворачивая их скачком, поэтому вещество быстро намагничивается.

Для ферромагнетиков, в отличие от слабомагнитных веществ, характерна нелинейная зависимость  $J = J(H)$ .

Величина намагниченности  $J$  для ферромагнетика зависит от его предыдущего состояния, или истории намагничивания. Это явление называется магнитным гистерезисом. Впервые оно было исследовано А. Г. Столетовым, получившим зависимость  $J(H)$  в виде петли магнитного гистерезиса (см. рис. 9.15.1).

Ферромагнетики с малой коэрцитивной силой,  $H_c = 2 \cdot 10^{-2} \text{ A/M}$ , называются мягкими; они имеют узкую петлю гистерезиса. Ферромагнетики с большой коэрцитивной силой,  $H_c \geq 10^5 \text{ A/M}$ , называются жесткими, имеют широкую петлю гистерезиса.

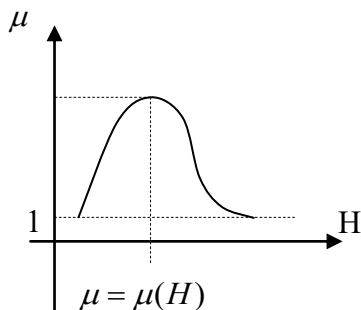


Рис. 9.15.2

Мягкие ферромагнетики применяются для изготовления сердечников трансформаторов и т. п. Это мягкое железо, сплавы железа и никеля. Жесткие ферромагнетики применяют для изготовления постоянных магнитов, это углеродистые и вольфрамиранные стали.

Для ферромагнетиков характерны очень большие значения коэффициента  $\mu$ : для желе-

за  $\mu_{\max} = 5000$ , для супермаллоя (сплав железа с никелем)  $\mu = 800000$ . При этом величина  $\mu$  нелинейно зависит от напряженности поля  $H$  (в очень сильных полях  $\mu = 1$ ) (см. рис. 9.15.2). Величины  $\mu_{\max} = 10^3 \dots 10^6$ , т. е. очень велики.

Все ферромагнетики при определенной температуре, называемой точкой Кюри  $T_k$ , теряют свои магнитные свойства вследствие разрушения доменов и становятся парамагнетиками.

При охлаждении ниже  $T_k$  ферромагнетик вновь способен намагничиваться.

В процессе намагничивания ферромагнетик изменяет свои линейные размеры и объем. Данное явление называется *магнитострикцией*. Оно применяется в генераторах и приемниках ультразвука.

Магнитострикция – явление изменения линейных размеров и объема ферромагнетика при намагничивании (фазовый переход второго рода).

*Ферриты* – химические соединения окислов металлов типа  $MeFe_2O_3$ , здесь  $Me$  – двухвалентный ион металла (магний, марга-

нец, хром, железо, кобальт, никель, цинк, гадолиний –  $Mg, Mn, Cr, Fe^{2+}, Co, Ni, Zn, Gd$ ).

Они имеют хорошие ферромагнитные и полупроводниковые свойства и большое удельное электрическое сопротивление.

Ферриты применяются для изготовления постоянных магнитов, сердечников радиочастотных контуров, антенн, а также в качестве магнитных носителей информации (в виде рабочего покрытия, наносимого на ленту, диск и т. д.)

### 9.16. Вихревое электрическое поле

ЭДС электромагнитной индукции  $\varepsilon_i$  в соответствии с законом Фарадея возникает в контуре при изменении магнитного потока  $\Phi_B$ , пронизывающего ЭДС  $\varepsilon_i$  и индукционный ток возникают как в движущемся, так и в неподвижном замкнутом контуре, находящемся в переменном магнитном поле.

Появление ЭДС индукции в движущемся проводнике в магнитном поле объясняется действием сил Лоренца на свободные заряды. В неподвижном контуре сила Лоренца не возникает.

Возникновение  $\varepsilon_i$  в неподвижном проводнике, находящемся в переменном магнитном поле объясняется в общем случае гипотезой Максвелла.

Возникновение ЭДС  $\varepsilon_i$  в контуре происходит в результате появления в нем сил неэлектростатической природы, которые в неподвижном проводнике не являются силами Лоренца, не связаны с тепловыми или химическими явлениями и не могут быть объяснены ими.

Возникновение ЭДС  $\varepsilon_i$  объясняется гипотезой Максвелла:

– всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле  $\vec{E}_B$ , создающее в проводнике ЭДС индукции  $\varepsilon_i$ ;

– ЭДС индукции равна циркуляции вектора  $\vec{E}_B$  или скорости изменения магнитного потока  $\Phi_B$  сквозь замкнутый контур:

$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.16.1)$$

Поскольку

$$\Phi_B = \int_s \vec{B} d\vec{S},$$

получаем

$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{S}. \quad (9.16.2)$$

$l$  – замкнутый контур;  $S$  – поверхность, натянутая на контур.

Для неподвижного контура операции дифференцирования и интегрирования здесь можно поменять местами:

$$\oint_l \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (9.16.3)$$

здесь частная производная показывает, что магнитный поток  $\Phi_B$  и магнитная индукция  $\vec{B}$  являются функциями времени.

Из уравнения (9.16.3) следует, что циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  не равна нулю, поэтому электрическое поле  $\vec{E}_B$  является вихревым, как и магнитное поле. Это отличает поле  $\vec{E}_B$  от электростатического поля.

Формула (9.16.3) является общим выражением закона электромагнитной индукции (ЭМИ).

В общем случае электрическое поле определяется в виде векторной суммы потенциального и вихревого электрических полей

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B, \quad (9.16.4)$$

согласно принципу суперпозиции.

### 9.17. Ток смещения. Обобщённая теорема о циркуляции вектора напряжённости $\vec{H}$

По теории Максвелла всякое переменное во времени магнитное поле создает в окружающем пространстве переменное электрическое вихревое поле.

В силу диалектической связи между электрическими и магнитными явлениями существует и обратное явление – магнит-

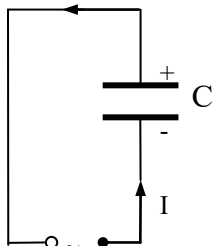


Рис. 9.17.1

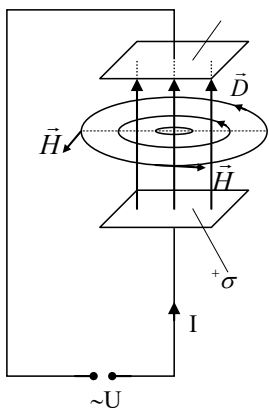


Рис. 9.17.2

но-электрическая индукция: изменяющееся во времени электрическое поле создает соответствующее переменное магнитное поле.

Деление поля на магнитное и электрическое по сути является условным и зависит от выбора системы отчета, в которой рассматривается данное явление: неподвижный заряд создает электрическое потенциальное поле, однако, относительно движущейся системы отсчета он создает и магнитное поле; аналогично, неподвижный проводник с током создает только магнитное поле (стационарное), но в движущейся системе отсчета он создает и вихревое электрическое поле. Следовательно, эти поля  $\vec{E}$  образуют *единое электромагнитное поле*.

Связь между электрическим и магнитным полями описывается с помощью *тока смещения*, понятия, введенного Максвеллом.

Рассмотрим конденсатор, питаемый от источника переменного напряжения (см. рис. 9.17.1, 9.17.2). Между пластинами периодически заряжающегося и разряжающегося конденсатора возникает переменное электрическое поле. Это поле создает такое магнитное поле, которое соответствует току смещения  $I_{\text{см}}$ , «протекающему» между пластинами конденсатора и равному по величине току проводимости  $I$  в цепи:

$$I_{\text{см}} = I. \quad (9.17.1)$$

Ток проводимости вблизи пластин конденсатора, с применением теоремы Остроградского – Гаусса (7.12.2), можно представить в виде

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad q = \int_s \sigma dS, \quad (9.17.2)$$

$\sigma$  – поверхностная плотность заряда на пластине конденсатора;

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q,$$

следовательно

$$D = \sigma \quad (9.17.3)$$

т. е. поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на пластинах равна электрическому смещению  $D$ ; получаем ток проводимости

$$I = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \int_S \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS. \quad (9.17.4)$$

Сила тока проводимости может быть выражена через плотность тока  $\vec{j}$

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

аналогично, ток смещения

$$I_{cm} = \int_S \vec{j}_{cm} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad \text{или} \quad \vec{j}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (9.17.5)$$

«ток смещения» Максвелла (плотность тока смещения) равен частной производной вектора электрического смещения  $\vec{D}$  по времени. Здесь частная производная показывает, что  $\vec{D}$  является функцией времени.

Ток смещения – переменное электрическое поле, создающее магнитное поле, соответствующее току проводимости в цепи.

Направление тока смещения (9.17.5) совпадает с направлением тока проводимости: при зарядке конденсатора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$ ,  $\vec{j}_{cm}$  – направлен в сторону вектора  $\vec{D}$ , при этом  $\vec{j}_{cm}$  и  $\vec{j}$  совпадают по направлению; аналогично, при разрядке конденсатора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$ , и токи  $\vec{j}_{cm}$ ,  $\vec{j}$  направлены оба в обратном направлении.

Поскольку  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , (1.12.3), то ток смещения



$$\vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (9.17.6)$$

здесь  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  – плотность тока смещения в вакууме;  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  – плотность тока смещения поляризации диэлектрика.

Следовательно, ток смещения возникает не только в проводниках и диэлектриках, но и в вакууме.

Сумма токов проводимости и смещения называется полным током:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (9.17.7)$$

$$I_{полн} = I + I_{см}.$$

Полный ток всегда замкнут посредством тока смещения.

Теорема о циркуляции вектора напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля была обобщена Максвеллом в соответствии с величиной полного тока в виде

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

$l$  – контур, охватывающий полный ток  $I_{полн}$ ;  $S$  – площадь поверхности, ограниченной этим контуром;  $\vec{H}$  – поле токов проводимости и смещения.

Циркуляция вектора напряженности  $\vec{H}$  по замкнутому кругу  $l$  равна сумме токов проводимости и смещения, протекающих сквозь поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром.

## 9.18. Уравнения электромагнитного поля

Основу теории электромагнитного поля, развитой Максвеллом в 1860–1865 гг. составляет система четырех уравнений, объединившая теоремы Остроградского – Гаусса и теоремы о циркуляции для электрического и магнитного полей.

1. Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (9.18.1)$$

$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$ , – суммарное электрическое поле.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (9.18.2)$$

3. Теорема Гаусса для электрического поля  $\vec{D}$  в среде

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q = \sum_i q_i = \int_V \rho_q dV, \quad (9.18.3)$$

$V$  – объем, охватываемый поверхностью  $S$ ;  $\rho_q$  – объемная плотность заряда.

4. Теорема Гаусса для магнитного поля  $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (9.18.4)$$

Эта система уравнений дополняется соотношениями, учитывающими свойства среды

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (9.18.5)$$

Для стационарных полей,  $\vec{E} = const$ ,  $\vec{B} = const$ , система уравнений (9.18.1) – (9.18.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0, \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \\ \oint_l \vec{H} d\vec{l} &= I, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{aligned} \quad (9.18.6)$$

Уравнения Максвелла также представляются в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (9.18.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_q, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Эти уравнения дополняются граничными условиями на поверхности раздела двух сред

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (9.18.8)$$

остальные составляющие изменяются скачком.

Для однородных полей  $\vec{E} = \text{const}$ ,  $\vec{B} = \text{const}$ , уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_s \vec{D} d\vec{S} = q,$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I, \quad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле создает в окружающем пространстве переменное электрическое поле и наоборот. Следовательно, переменные электрическое и магнитное поле образуют единое электромагнитное поле. Уравнения электромагнитного поля позволяют решать основную задачу электродинамики: определять характеристики поля по заданным характеристикам зарядов и токов.

## Задания для самостоятельной работы и задачи к главам 7–9

### *Зачётные требования*

1. Электростатика: знание основных понятий, принципов и законов электростатики и условий их применения (границы и область применения); умение применять законы электростатики в конкретных условиях задач и тестов.

2. Электрический ток, его характеристики, постоянный ток: знание законов Ома, Джоуля – Ленца, формул работы и мощности

тока, правил Кирхгофа; умение применять законы постоянного тока в конкретных условиях задач и тестов.

3. Магнитное поле, основные характеристики, свойства: знать законы, определяющие явления, свойства магнитного поля; уметь применять их в конкретных условиях задач и тестов.

### Зачётные задания

Выполнить задания в соответствии со своим вариантом.

#### Задача 1.

Две проводящие поверхности заряжены с поверхностной плотностью  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Определить:

- 1) напряженность поля в т.  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ;
- 2) разность потенциалов  $\Delta\phi$  между т.  $A_1$  и т.  $A_2$ ;
- 3) энергию частицы, прошедшей разность потенциалов  $\Delta\phi$ , если ее начальная скорость  $v_0$  направлена от т.  $A_1$  к т.  $A_2$ .

Значения параметров приведены в табл. 9.19.1.

Таблица 9.19.1

№ варианта	№ рисунка	$\sigma_1$ , нКл/ м <sup>2</sup>	$\sigma_2$ , нКл/ м <sup>2</sup>	$d1$ , м	$a_1$ , м	$a_2$ , м	$r1$ , м	$r2$ , м	$\epsilon$	Тип частицы	$v_0$ , м/с
1	1	10	-20	0,1	0,08	0,02	-	-	1	$\alpha$	$10^5$
2	2	12	-6	-	0,12	0,01	0,05	0,1	1	$e$	0
3	3	20	-12	-	0,1	0,04	0,08	0,16	1	$p$	0
4	4	-12	20	0,2	0,02	0,16	-	-	2	$e$	$2 \cdot 10^4$
5	2	-6	24	-	0,14	0,04	0,1	0,16	1	$e$	0
6	3	-10	15	-	0,2	0,02	0,12	0,24	1	$e$	0
7	4	8	4	0,18	0,1	0,17	-	-	2	$p$	$6 \cdot 10^4$
8	2	-6	12	-	0,2	0,04	0,06	0,12	1	$e$	0
9	3	10	-3	-	0,21	0,07	0,2	0,3	1	$p$	0
10	4	18	-10	0,24	0,02	0,22	-	-	2	$e$	$2 \cdot 10^5$

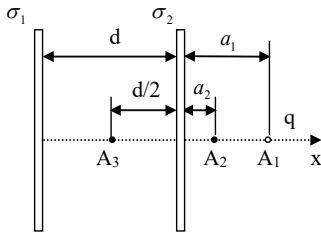


Рис. А

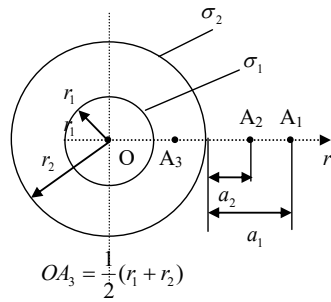


Рис. Б

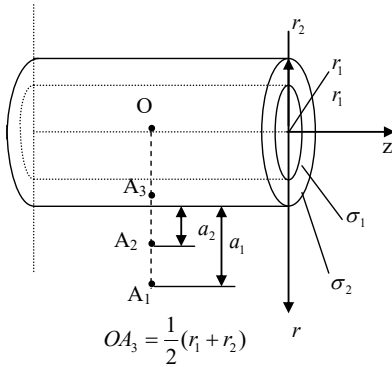


Рис. В

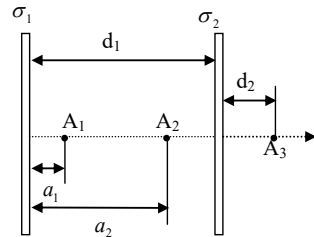


Рис. Г

Типы частиц и их параметры даны в табл. 9.19.2.

Таблица 9.19.2

Тип частицы	Обозначение	Заряд, Кл	Масса покоя частицы, кг
Электрон	$e$	$-1,6 \cdot 10^{-19}$	$9,11 \cdot 10^{-31}$
Протон	$p$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	$1,67 \cdot 10^{-27}$
$\alpha$ -частицы	$\alpha$	$3,2 \cdot 10^{-19}$	$6,64 \cdot 10^{-27}$

*Задача 2.*

Электрический нагреватель имеет две секции с сопротивлением  $R_1=R_2=R$ , питается от сети с напряжением  $U$ . К.п.д. нагревателя  $\eta=0,8$ .

Найти время, в течение которого вода объемом  $V$  нагреется до кипения, если ее начальная температура  $t_0$ :

а) при последовательном включении секций (время  $\tau_1$ );

б) при параллельном включении секций (время  $\tau_2$ ).

Теплоемкость воды  $C = 4,19 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$ . Значения параметров приведены в табл. 9.19.3.

*Таблица 9.19.3*

<i>№</i>	<i>U, в.</i>	<i>R, Ом</i>	<i>V, л</i>	<i>t0, С0</i>	$\eta$	<i>P1, Вт</i>	<i>P2, Вт</i>	$\tau_1$ , мин	$\tau_2$ , мин	<i>Q, Дж затр.</i>	<i>A, Дж</i>	<i>S, р.</i>
1	220	20	3	15	0,8	?	?	?	?	?	?	?
2	110	20	3,2	10	0,85	?	?	?	?	?	?	?
3	?	15	3,5	14	0,75	?	?	40	?	?	?	?
4	127	25	3	?	0,78	?	?	?	15	?	?	?
5	150	30	?	16	0,82	?	?	50	?	?	?	?
6	200	?	2,5	12	0,8	?	?	?	12	?	?	?

Здесь  $Q_{\text{затр}}$  – количество теплоты, выделяющее в нагревателе (затраченное);  $P_1$  – мощность нагревателя при последовательном включении секций;  $P_2$  – мощность нагревателя при параллельном включении секций;  $A$  – работа тока;  $s$  – стоимость электроэнергии (тариф  $s = 2 \text{ р.}/(\text{кВт} \cdot \text{ч})$ ).

### Задача 3.

Заряженная частица массой  $m$  с зарядом  $q$  движется в однородном магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , направленной под углом  $\alpha$  к вектору  $\vec{B}$ . Траектория частицы – окружность радиусом  $R$  или спираль с радиусом  $R$  и шагом  $h$ , период обращения частицы  $T$ , удельный заряд  $q/m = q_1$ . Найти параметры, обозначенные знаком «?». Данные представлены в табл. 9.19.4.

Таблица 9.19.4

№	Тип частицы	$v_1$ м/с	$\alpha^0$	$B$ , Тл	$R$ , м	$h$ , м	$T$ , с	$q_1 \frac{\text{Кл}}{\text{Кг}}$
1	$e$	$10^4$	$30^0$	$50 \cdot 10^{-3}$	?	?	?	?
2	$\rho$	$10^5$	$45^0$	?	0,02	?	?	?
3	$\alpha$	$1,15 \cdot 10^4$	?	$4 \cdot 10^{-3}$	-	0,06	?	?
4	$e$	$3 \cdot 10^6$	$60^0$	?	0,04	0,08	?	?
5	$\rho$	?	$30^0$	$2 \cdot 10^{-3}$	0,01	?	?	?
6	?	$3 \cdot 10^5$	$45^0$	$30 \cdot 10^{-3}$	?	?	$10^{-6}$	?

### Контрольные вопросы к главам 7–9

1. Закон Кулона, напряжённость электростатического поля, принцип суперпозиции, поток вектора напряжённости.

2. Расчёт электростатических полей на основе принципа суперпозиции. Расчёт электростатических полей с помощью теоремы Остроградского – Гаусса.

3. Работа и потенциал в ЭСП. Понятия работы, потенциала, потенциальной энергии, их взаимосвязь; разность потенциалов и работа в ЭСП.

4. Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризованность диэлектрика.

5. Электрическое смещение. Теорема Остроградского – Гаусса для физической среды.

6. Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция.

7. Электрическая ёмкость проводника, взаимная ёмкость двух проводников. Формулы ёмкости электрических конденсаторов и их батарей.

8. Энергия электрического поля. Формулы энергии ЭСП одного заряда, системы зарядов, конденсатора.

9. Движение частиц в электростатическом поле. Уравнения движения заряженной частицы в ЭСП.

10. Постоянный электрический ток, сила тока, плотность. Э.Д.С. и напряжение.

11. Закон Ома. Электрическое сопротивление проводника. Сверхпроводимость.

12. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.

13. Закон Ома для неоднородного участка цепи.

14. Правила Кирхгофа.

15. Электрический ток в вакууме, в газах, в жидкостях.

16. Магнитное поле. Основные характеристики, свойства

17. Закон Био – Савара – Лапласа. Магнитное поле прямого тока и кругового тока.

18. Закон Ампера. Сила взаимодействия двух параллельных проводников с токами.

19. Сила Лоренца, свойства.

20. Движение частиц в магнитном поле.

21. Эффект Холла. Циркуляция вектора  $B$  магнитной индукции. Закон полного тока.

22. Поток вектора  $B$ . Теорема Гаусса для магнитного поля.

23. Намагниченность вещества. Магнитное поле в веществе.

24. Магнитный момент электрона и атома.

25. Диамагнетики и парамагнетики. Ферромагнетики и их свойства.

26. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца.

27. Индуктивность проводника. Самоиндукция.

28. Вращение рамки в магнитном поле, электрический генератор.



29. Вихревые токи. Токи при замыкании и размыкании электрической цепи. Электрический трансформатор.
30. Энергия магнитного поля. Плотность энергии.
31. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений электромагнитного поля Максвелла.

### Список литературы

1. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики: для студ. техн. вузов. 3-е изд., испр. и доп. СПб.: Книжный мир, 2006. 327 с.
2. Савельев И. В. Курс физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. 4-е изд. СПб.: Лань, 2008. 480 с.
3. Савченко Н. Д., Кузьмина Т. В., Рахлецова Т. В. Основы физики: учеб. пособие. Ч. 1. Механика. Электродинамика. Термодинамика. Чита: ЗабГУ, 2015. 233 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. Т. 3. Электричество. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 656 с.
5. Трофимова Т. И. Краткий курс физики с примерами решения задач: учеб. пособие. М.: Кнорус, 2010. 280 с.
6. Трофимова Т. И. Руководство к решению задач по физике: учеб. пособие для прикладного бакалавриата. 3-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2017. 265 с.
7. Физика: метод. указания и контрольные задания / А. А. Воробьев [и др.]. – М.: Высшая школа, 1987. 208 с.
8. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2003. 640 с.
9. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Наука, 2005. 512 с.

## Глава 10. Колебания в механических и электромагнитных системах. Упругие волны

### 10.1. Колебательное движение. Гармонические колебания

*Колебательным движением* называется движение, повторяющееся с течением времени.

Материальная система, в которой происходит колебательное движение, называется *колебательной системой*.

Колебательные процессы имеют самое широкое распространение в природе и в технике и могут иметь различную физическую природу; существуют механические, электромагнитные, электро-механические колебания и т. д. Несмотря на это, они описываются одноподобными уравнениями, имеют сходные характеристики и могут рассматриваться на основе единого подхода.

Примеры колебательных процессов: качания маятника; колебания тела на пружине; колебание тока в электромагнитном контуре; колебания конструкций мостов, машин, транспортных средств; климатические колебания (сезонные и суточные изменения температуры, уровня воды рек, количества осадков и др.); колебания в биологических системах, в живых организмах (биение сердца, дыхание и т. д.); колебания атомов и молекул в кристаллической решетке твердых тел; сейсмические колебания земной коры (землетрясения); вибрации машин; колебательные явления в экономике (колебания спроса, цены, производительности и т. д.).

Существуют несколько основных типов колебаний: свободные, затухающие и вынужденные колебания, а также автоколебания и параметрические колебания.

*Свободные колебания* – такие, которые совершаются в колебательной системе за счет первоначально подведенного количества энергии, при дальнейшем отсутствии внешних периодических воздействий и поступления энергии извне.

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, характеризующих систему и изменяющихся со временем, повторяются через равные интервалы времени, называемые *периодом колебаний*  $T$ ,  $S(t) = S(t+T)$ , где  $T$  – период колебаний.

Периодические колебания называются *гармоническими*, если происходят по закону синуса (косинуса)

$$S = A \cos(\omega t + \alpha_0) = A \sin\left(\omega t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.1.1)$$

где  $S$  – некоторая колеблющаяся физическая величина;  $A = S_{\max}$  – амплитуда колебаний или максимальное значение величины  $S$ ;  $\omega$  – циклическая (круговая) частота колебаний;  $\alpha_0$  – начальная фаза колебаний,  $\alpha = (\omega t + \alpha_0)$  – фаза колебаний.

Гармонические колебания могут быть представлены в виде проекции вращающегося вектора  $r = A$  на ось координат

$$S_1 = S = A \cos \alpha = A \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (10.1.2)$$

$$S_2 = A \sin(\omega t + \alpha_0),$$

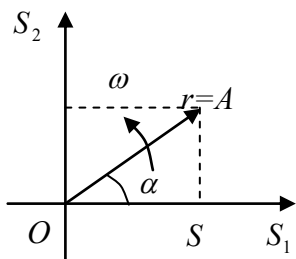


Рис. 10.1.1

$\omega$  – угловая скорость вектора  $r$  (см. рис. 10.1.1).

Возможно также представление гармонических колебаний в виде комплексного числа по формуле Эйлера

$$\tilde{S} = A e^{i(\omega t + \alpha_0)} = A \exp[i(\omega t + \alpha_0)]. \quad (10.1.3)$$

При этом полагается, что колебания определяются действительной частью комплексного числа (10.1.3).

Период колебаний определяется из условия

$$\omega(t + T) + \alpha_0 = (\omega t + \alpha_0) + 2\pi, \quad (10.1.4)$$

т. к. за период  $T$  фаза функции косинуса изменяется на величину  $2\pi$ . Поэтому

$$\omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.1.5)$$

Поскольку  $T = \frac{1}{\nu}$ ,  $\nu$  – частота колебаний в герцах, то

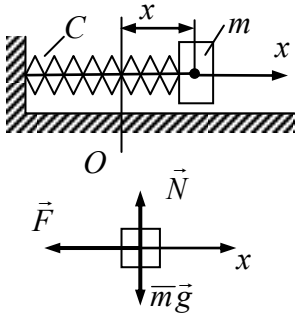
$$\omega = 2\pi\nu, \quad (10.1.6)$$

циклическая частота равна количеству колебаний за  $2\pi$  секунд, и измеряется в радианах в секунду.

## 10.2. Свободные колебания механической системы

Свободные механические колебания рассмотрим на примере пружинного маятника, а также математического и физического маятников.

*Пружинный маятник.* Пружинный маятник есть тело массой  $m$ , колеблющееся под действием упругой силы  $\vec{F}$ .



Уравнение движения тела (см. рис. 10.2.1)

$$ma_x = \sum F_{ix} = F_x,$$

$a_x = a = \ddot{x}$  – ускорение тела есть вторая производная координаты  $x$  по времени;  $F_x = -cx$  – сила упругости;  $c$  – коэффициент жесткости пружины. Получаем

Рис. 10.2.1

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad (10.2.1)$$

дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний (гармонический осциллятор). Общее решение этого уравнения

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (10.2.2)$$

определяет гармонические колебания маятника с циклической (собственной) частотой  $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ .

Упругая сила  $\vec{F}$  всегда направлена к положению равновесия тела, такая сила называется *восстанавливающей*. Свободные колебания в механической системе возможны лишь при наличии восстанавливающей силы.

Скорость тела

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Ускорение тела

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

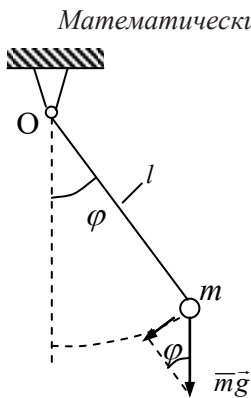
Определим энергию колебаний. Полная энергия системы состоит из кинетической и потенциальной энергии

$$E = E_{кин} + E_{пот},$$

$$\begin{aligned} E_{кин} &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0), E_{пот} = \\ &= \frac{1}{2}cx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0). \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = const, \quad (10.2.4)$$

полная энергия системы не изменяется и равна энергии, первоначально сообщенной системе.



*Математический маятник.* Материальная точка массой  $m$ , подвешенная на невесомом жестком стержне длиной  $l$  или нерастяжимой нити

называется математическим маятником (см. рис. 10.2.2).

Маятник колеблется под действием силы тяжести, которая является здесь восстанавливающей.

Составим уравнение движения маятника, применив уравнение динамики вращательного движения тела

$$J \cdot \varepsilon = M, \quad (10.2.5)$$

где  $J = ml^2$  – момент инерции маятника;  $\varepsilon = \ddot{\phi}$  – угловое ускорение;  $M = -mgl \sin \phi$ , – момент силы  $m\vec{g}$  относительно точки подвеса  $O$ .

При малых колебаниях маятника  $\sin \phi \approx \phi$ , получим

$$ml^2\ddot{\phi} + mgl\phi = 0, \quad \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0, \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0, \quad (10.2.6)$$

это дифференциальное уравнение свободных колебаний маятника с частотой  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

Общее его решение есть уравнение гармонических колебаний

$$\phi = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (10.2.7)$$

где  $A = \phi_{\max}$  – амплитуда маятника;  $\omega_0$  – циклическая частота колебаний (собственная частота).

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (10.2.8)$$

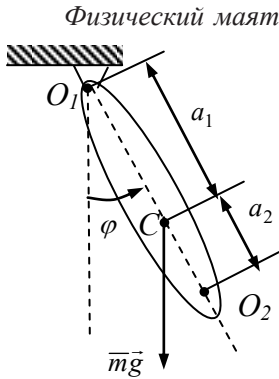


Рис. 10.2.3

**Физический маятник.** Физический маятник – твердое тело, способное совершать колебания вокруг горизонтальной оси подвеса под действием силы тяжести.

Рассмотрим колебания физического маятника массой  $m$  вокруг горизонтальной оси  $O_1$  (см. рис. 10.2.3).

Уравнение движения маятника

$$J_1 \varepsilon = M^e, \quad (10.2.8)$$

где  $J_1$  – момент инерции тела относительно оси  $O_1$ ;  $\varepsilon = \ddot{\phi}$ , – угловое ускорение;  $M^e = -mga_1 \sin \phi$ , – момент силы

тяжести относительно т.  $O_1$ .

Для малых колебаний  $\sin \phi \approx \phi$ , и уравнение движения примет вид

$$J_1 \ddot{\phi} + mga_1 \phi = 0, \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \quad (10.2.9)$$

$$\omega_0^2 = \frac{mga_1}{J_1}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (10.2.9)

$$\phi = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (10.2.10)$$

уравнение гармонических колебаний маятника, с частотой  $\omega_0$ .

Представим частоту  $\omega_0$  в виде

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga_1}{J_1}} = \sqrt{\frac{g}{l_{np}}}, \quad l_{np} = \frac{J_1}{ma_1}, \quad (10.2.11)$$

$l_{np}$  — приведенная длина физического маятника.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mga_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}, \quad (10.2.12)$$

что аналогично формуле (10.2.8).

Приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника, имеющего такой же период колебаний, как и данный физический

Приведенная длина определяет также положение центра качаний (т.  $O_2$ ) для данного маятника. Центр качаний имеет особое свойство: период колебаний маятника равен периоду колебаний маятника, подвешенного в т.  $O_2$ . Покажем это, применив теорему Штейнера в выражении момента инерции  $J_1$ :

$$J_1 = J_c + ma_1^2.$$

Тогда

$$l_{np} = \frac{J_1}{ma_1} = a_1 + \frac{J_c}{ma_1} = a_1 + a_2, \quad (10.2.13)$$

где  $a_2 = \frac{J_c}{ma_1}$ .

Если закрепить маятник на оси  $O_2$  и определить его приведенную длину, получим

$$l_{np_2} = \frac{J_2}{ma_2} = \frac{J_c + ma_2^2}{ma_2} = a_2 + \frac{J_c}{ma_2}. \quad (10.2.14)$$

Из (10.2.13) следует, что  $\frac{J_c}{ma_2} = a_1$ , т. е.

$$l_{np2} = a_2 + a_1, \quad (10.2.15)$$

тогда

$$l_{np} = l_{np2},$$

приведенная длина маятника одинакова, следовательно, одинаковы частота и период колебаний маятника относительно  $t_1$  и  $t_2$ .

### 10.3. Свободные колебания в электромагнитном контуре

Рассмотрим колебательный контур, содержащий соленоид  $L$ , резистор  $R$  и конденсатор  $C$ .

В некоторый начальный момент времени  $t = 0$  конденсатор заряжается зарядом  $q$ , система получает начальную энергию, равную энергии электрического поля конденсатора  $W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ .

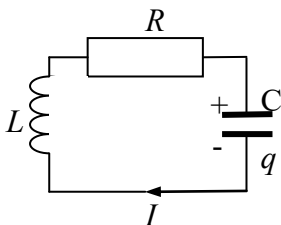


Рис. 10.3.1

В процессе перезарядки пластин конденсатора в цепи возникают электромагнитные колебания, т. е. колебания заряда  $q$  конденсатора, напряжения  $U$  и тока  $I$  в цепи (см. рис. 10.3.1).

Применяя закон Ома для данной цепи, получаем

$$IR + U_c = \varepsilon_s, \quad (10.3.1)$$

где  $IR$  – напряжение на резисторе;

$U_c = q/c$  – напряжение на конденсаторе;  $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$  – ЭДС самоиндукции в катушке,  $I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$ .

Подставляя эти значения, получим дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в контуре

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{c} = 0 \quad \text{или}$$



$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (10.3.2)$$

Если пренебречь сопротивлением цепи  $R = 0$ , получим дифференциальное уравнение свободных колебаний

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (10.3.3)$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , — частота свободных колебаний.

Его решение

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varepsilon). \quad (10.3.4)$$

Период колебаний определяется по формуле Томсона

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (10.3.5)$$

Ток в цепи

$$I = \dot{q} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varepsilon) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I_m = q_m \omega. \quad (10.3.6)$$

Как следует из этого, ток в цепи опережает по фазе заряд на величину  $\pi/2$ .

Напряжение на конденсаторе

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varepsilon), \quad U_m \cos(\omega_0 t + \varepsilon). \quad (10.3.7)$$

Энергии электрического и магнитного поля в процессе колебаний изменяются:

$$\begin{cases} W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2C} q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varepsilon); \\ W_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} LI_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varepsilon). \end{cases} \quad (10.3.8)$$

Полная энергия системы

$$W = W_E + W_B = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 =$$

$$= \frac{1}{2C} q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \epsilon) + \frac{1}{2} L q_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \epsilon).$$

Поскольку  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , то  $\frac{1}{C} = \omega_0^2 L$ , тогда

$$W = \frac{1}{2} q_m^2 \omega_0^2 L \cos^2(\omega_0 t + \epsilon) + \frac{1}{2} q_m^2 \omega_0^2 L \sin^2(\omega_0 t + \epsilon) =$$

$$= \frac{1}{2} I_m^2 L = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{c} = const \quad (10.3.9)$$

полная энергия электромагнитного контура остается постоянной (если  $R = 0$ , а также нет потерь энергии на излучение волн).

#### 10.4. Затухающие колебания

*Затухающие колебания механической системы.* Затухаю-

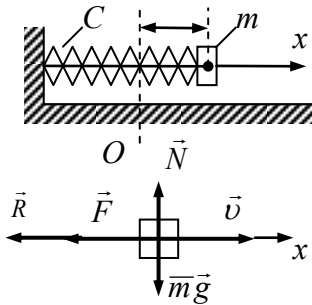


Рис. 10.4.1

щими колебаниями называются свободные колебания системы с учетом сил сопротивления (диссипативных сил), под действием которых энергия системы постепенно рассеивается в окружающую среду, и колебания прекращаются.

Рассмотрим колебания пружинного маятника с учетом силы вязкого сопротивления среды  $\vec{R} = -\alpha \vec{v}$ , где  $\alpha$  – коэффициент вязкого сопротив-

ления;  $\vec{v}$  – скорость тела (см. рис. 10.4.1).

Уравнение движения тела

$$m\ddot{x} = \sum F_{i_x} = F_x + R_x, \quad F_x = -cx, \quad R_x = -\alpha v_x = -\alpha \dot{x}. \quad (10.4.1)$$

или

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + cx = 0, \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10.4.2)$$

$n = \frac{\alpha}{2m}$  – коэффициент затухания колебаний;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота свободных колебаний.

Уравнение (10.4.2) называется дифференциальным уравнением затухающих колебаний. При условии  $\omega_0 > n$  (малое сопротивление среды) оно имеет общее решение

$$x = A_0 e^{-nt} \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad (10.4.3)$$

здесь  $A_0$  – начальная амплитуда;  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$  – циклическая частота затухающих колебаний;  $\alpha_1$  – начальная фаза;  $A(t) = A_0 e^{-nt}$  – амплитуда колебаний. При  $t \rightarrow \infty$ ,  $A(t) \rightarrow 0$ , и колебания затухают.

График колебаний представляет собой затухающую синусоиду, ограниченную двумя асимптотами:  $A_0 e^{-nt}$  и  $(-A_0 e^{-nt})$  (см. рис. 10.4.2).

Период затухающих колебаний

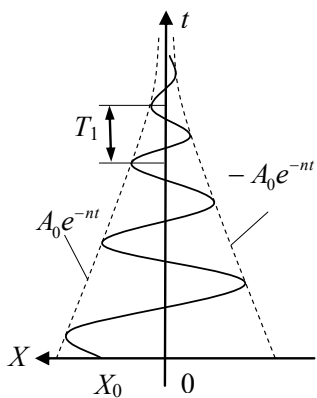


Рис. 10.4.2

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (10.4.4)$$

поскольку  $\omega_1 < \omega_0$ .

Процесс затухания колебаний характеризуется декрементом колебаний

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{nT}. \quad (10.4.5)$$

Логарифм этого выражения называется логарифмическими декрементом колебаний:

$$\delta = nT, \quad (10.4.6)$$

и также характеризует быстроту затухания колебаний в зависимости от величины коэффициента  $n$ , учитывающего вязкие свойства среды  $\alpha$ .

Логарифмический декремент можно также представить в виде

$$\delta = nT = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (10.4.7)$$

$\tau = \frac{1}{n}$  – время релаксации, т. е. время, в течение которого амплитуда колебаний убывает в  $e$ -раз;  $N_e$  – количество колебаний, совершенных системой за время  $\tau$ .

Затухающие колебания характеризуются также добротностью системы

$$Q = \frac{\omega_0}{2n} = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e, \quad (10.4.8)$$

которая определяет отношение энергии системы к ее уменьшению за период колебаний

*Затухающие колебания в электромагнитном контуре.* Рассмотрим колебания в электромагнитном контуре, в котором активное сопротивление  $R \neq 0$ .

Уравнение колебаний в дифференциальной форме имеет вид (см. гл. 10.3)

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0 q = 0, \quad (10.4.9)$$

здесь  $2n = \frac{R}{L}$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Общее решение при условии  $n < \omega_0$

$$q = Q_0 e^{-nt} \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1), \quad (10.4.10)$$

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ , – частота затухающих колебаний;

$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}$ , – период затухающих колебаний.

Быстрота затухания характеризуется декрементом колебаний и логарифмическим декрементом

$$\Delta = e^{nT}, \delta = nT = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (10.4.11)$$

а также добротностью системы

$$Q = \frac{\omega_0}{2n} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e. \quad (10.4.12)$$

## 10.5. Вынужденные колебания механической системы.

### Резонанс

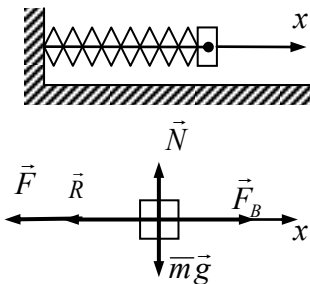


Рис. 10.5.1

Колебания системы, происходящие под действием внешней возмущающей силы, называются вынужденными.

Рассмотрим колебания пружинного маятника (см. рис. 10.5.1) при действии возмущающей силы  $F_B$ , изменяющейся по гармоническому закону

$$F_B = F_0 \cos \omega t. \quad (10.5.1)$$

Дифференциальное уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + F \quad \text{или}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}, \quad (10.5.2)$$

где  $n = \frac{\alpha}{2m}, \omega_0^2 = \frac{c}{m}$ .

Общее решение этого уравнения

$$x = x_1 + x_2, \quad (10.5.3)$$

$x_1$  — общее решение однородного уравнения, имеющее форму (10.4.3)

$$x_1 = A_0 e^{-nt} \cdot \cos(\omega_1 t + \epsilon_1),$$

$x_2$  – частное решение неоднородного уравнения, которое представляется в виде

$$x_2 = A_B \cos(\omega t - \phi), \quad (10.5.4)$$

$$A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (10.5.5)$$

амплитуда вынужденных колебаний

$$\phi = \arctg \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (10.5.6)$$

это начальная фаза вынужденных колебаний.

С течением времени, при  $t \rightarrow \infty$ , свободные колебания затухают,  $x_1 \rightarrow 0$ , и колебания системы  $x$  определяется вынужденными колебаниями  $x_2$ , происходящими с частотой возмущающей силы  $\omega$  и амплитудой  $A_B$ .

В процессе вынужденных колебаний в системе возможно возникновение резонанса – явления резкого возрастания амплитуды колебаний при совпадении частоты возмущающей силы с резонансной частотой  $\omega_p$ .

Частота  $\omega_p$  определяется из условия минимума подкоренного выражения, стоящего в знаменателе формулы амплитуды  $A_B$  (10.5.5), в виде

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}, \quad (10.5.7)$$

и при  $\omega_0^2 \gg n^2, \omega_p \cong \omega_0$ , т. е. резонансная частота при малом сопротивлении среды  $n$  близка к собственной частоте системы  $\omega_0$ .

При  $n=0$ , когда вязкое сопротивление отсутствует,  $\omega_p = \omega_0$ .

Частоте  $\omega_p$  соответствует амплитуда резонанса

$$A_p = \frac{f_0}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}. \quad (10.5.8)$$

Резонансная частота

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}.$$

При малом сопротивлении, когда  $n^2 \ll \omega_0^2$ , можно пренебречь величиной  $n^2$ , и тогда амплитуда резонанса примет вид

$$A_p = \frac{f_0}{2n\omega_0} = Q \cdot \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad (10.5.9)$$

$Q = \omega_0 / (2n)$  – добротность системы.

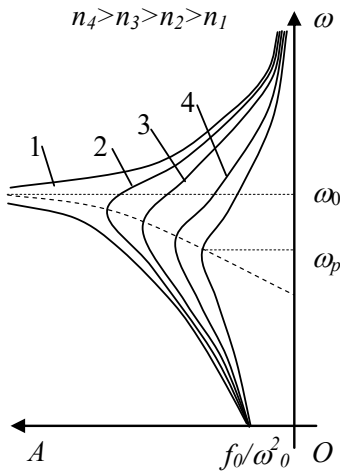


Рис. 10.5.2

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  приведена на рис. 10.5.2, где обозначены следующие зависимости  $A_B(\omega)$ :

1 – зависимость  $A_B(\omega)$ , при  $n = 0$ ,  $\omega_p = \omega_0$ ,  $A_B \rightarrow \infty$ , при  $\omega = \omega_0$ ;

2, 3, 4, –  $A_B(\omega)$ , при  $n \neq 0$ , когда  $n_2 < n_3 < n_4$ .

При

$$\omega = 0, A_B = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{c} = x_{cm}, \quad (10.5.10)$$

$x_{ct}$  – статическое отклонение маятника под действием силы  $F_0$  от состояния его равновесия.

## 10.6. Вынужденные колебания в электромагнитном контуре

Рассмотрим колебания в электромагнитном контуре (см. рис. 10.6.1), который подключен к источнику (цепи) переменного напряжения, изменяющегося по гармоническому закону

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (10.6.1)$$

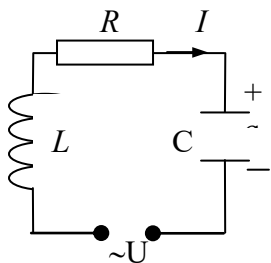


Рис. 10.6.1

В соответствии с законом Ома составим уравнение

$$IR + U_C = \varepsilon_S + U, \quad (10.6.2)$$

или

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t,$$

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos\omega t, \quad (10.6.3)$$

$$n = \frac{R}{2L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, f_0 = \frac{U_m}{L}.$$

Полученное уравнение описывает вынужденные колебания в электромагнитном контуре.

Его общее решение

$$q = q_1 + q_2, \quad (10.6.4)$$

$$q_1 = Q_0 e^{-nt} \cos(\omega_1 t + \varepsilon), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$$

это общее решение соответствующего однородного уравнения, определяющее затухающие колебания в контуре с частотой  $\omega_1$ ;

$$q_2 = A_B \cos(\omega t - \phi) = q_m \cos(\omega t - \phi), \quad (10.6.5)$$

это частное решение уравнения (10.6.3), описывающее вынужденные колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой вынужденных колебаний

$$A_B = q_m = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

и начальной фазой колебаний  $\phi$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

С учетом значений (10.6.3) получим выражения



$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \operatorname{tg} \phi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (10.6.6)$$

С течением времени свободные колебания в цепи затухают, и установившиеся колебания будут только вынужденными

$$q = q_2 = q_m \cos(\omega t - \phi). \quad (10.6.7)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \phi). \quad (10.6.8)$$

Ток в контуре  $I = \dot{q}$ ,

$$I = -q_m \omega \sin(\omega t - \phi) = I_m \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.6.9)$$

$$I_m = q_m \omega = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, U_m = \frac{q_m}{C}. \quad (10.6.10)$$

Формулу (10.6.9) можно переписать в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \phi_1),$$

$$\phi_1 = \phi - \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \phi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (10.6.11)$$

Тогда, при  $\phi_1 > 0$  ток отстает по фазе от напряжения, при  $\phi_1 < 0$  – опережает его.

## 10.7. Переменный ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания соответствует протеканию в электрической цепи переменного тока.

При изучении переменного тока к нему можно применять законы постоянного тока, считая переменный ток квазистационарным.

При частоте переменного тока  $\nu = 50$  Гц период колебаний тока и напряжения в цепи  $T = \frac{1}{\nu} = 0,02$  с.

Для электрической цепи длиной  $l = 100$  км,  

$$\tau = \frac{l}{c} = \frac{10^5}{3 \cdot 10^8} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3},$$

т. е.  $\tau \ll T$ , и ток в этой цепи является квазистационарным.

Ток называется *квазистационарным*, если выполняется условие

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T, \quad (10.7.1)$$

$\tau$  – время распространения электромагнитных возмущений по цепи длиной  $l$  со скоростью света  $c$ ;  $T$  – период колебаний переменного тока.

Данное условие означает, что за время  $\tau$  сила тока в цепи изменяется настолько незначительно, что может считаться одинаковой по всей цепи, в каждом ее сечении, т. е. ток является квазистационарным.

Рассмотрим протекание переменного тока через отдельные элементы цепи, к которым подведено переменное напряжение  $U = U_m \cos \omega t$ .

Ток через резистор  $R$  (см. рис. 10.7.1).

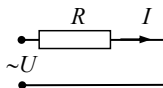


Рис. 10.7.1

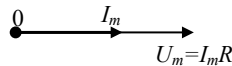


Рис. 10.7.2. Векторная диаграмма

По закону Ома

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (10.7.2)$$

ток и напряжение совпадают по фазе (см. рис. 10.7.2)

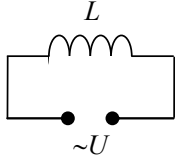


Рис. 10.7.3

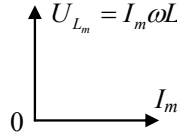


Рис. 10.7.4. Векторная диаграмма для катушки

Протекание тока через катушку индуктивности  $L$ .  
Закон Ома для данного участка цепи, рис. 10.7.3,

$$IR = U + \varepsilon_S. \quad (10.7.3)$$

Полагая  $R=0$ , получим  $U + \varepsilon_S = 0$ , или

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t, \quad dI = \frac{U_m}{L} \cos \omega t dt. \quad (10.7.4)$$

Интегрируя, определяем ток

$$I = \frac{U_m}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{U_m}{L\omega} \sin \omega t, \quad (10.7.5)$$

или

$$I = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (10.7.6)$$

$$U_m = U_{L_m} = I_m \omega L.$$

Следовательно, ток в катушке отстает от напряжения  $U$  по фазе на  $\pi/2$  (см. рис. 10.7.4).

Напряжение можно записать в виде

$$U_L(t) = U_{L_m} \cos \omega t, \quad U_{L_m} = I_m R_L, \quad (10.7.7)$$

$R_L = \omega L$  – индуктивное сопротивление.

Переменный ток через конденсатор  $C$ .

Напряжение на конденсаторе (см. рис. 10.7.5)

$$U_c(t) = U = U_m \cos \omega t,$$

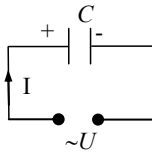


Рис. 10.7.5

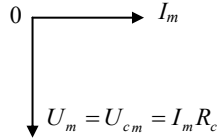


Рис. 10.7.6. Векторная диаграмма для конденсатора

заряд  $q = U_c C = U_m \cdot C \cos \omega t$ .

Сила тока

$$I = \dot{q} = -U_m C \omega \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (10.7.8)$$

$$I_m = U_m C \omega = \frac{U_m}{R_c}, \quad R_c = \frac{1}{\omega C}. \quad (10.7.9)$$

$R_c$  — емкостное сопротивление цепи.

Из формулы (10.7.8) следует, что ток опережает напряжение по фазе на рис. 10.7.6.

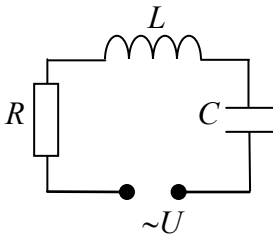


Рис. 10.7.7

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую последовательно включенные элементы  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , при протекании по ней переменного тока при подключении к сети с переменным напряжением  $U = U_m \cos \omega t$  (см. рис. 10.7.7).

Для определения основных характеристик тока воспользуемся методом векторной диаграммы напряжений

в цепи, учитывая результаты, полученные выше для отдельных элементов цепи.

При протекании переменного тока по цепи на сопротивлении  $R$ , катушке с индуктивностью  $L$  и конденсаторе емкостью  $C$

происходит падение напряжения соответственно на величины  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$ .

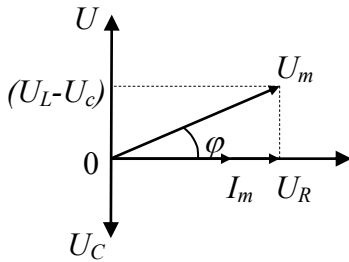


Рис. 10.7.8

При построении векторной диаграммы напряжений (см. рис. 10.7.8) учтено, что напряжение  $U_R$  совпадает по фазе с током, напряжение  $U_L$  опережает ток по фазе на  $\pi/2$ , напряжение  $U_C$  отстает от тока на  $\pi/2$ .

Векторная сумма амплитудных значений напряжений должна быть равна амплитуде подведенного напряжения  $U_m$  (см. рис. 10.7.8).

Из полученного треугольника напряжений следует

$$U_m^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \text{ или}$$

$$U_m^2 = I_m^2 R^2 + (I_m R_L - I_m R_C)^2. \quad (10.7.10)$$

Амплитудные значения напряжений на элементах цепи

$$U_L = I_m R_L; U_C = I_m R_C; U_R = I_m R.$$

Тогда амплитуда тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{Z}, \quad (10.7.11)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (10.7.12)$$

это полное сопротивление цепи.

Реактивное сопротивление цепи

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R_L - R_C.$$

Сдвиг фаз между током и напряжением также определяется из векторной диаграммы:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad (10.7.13)$$

в зависимости от соотношения между сопротивлением  $R_L$  и  $R_C$  ток в цепи будет отставать от напряжения или опережать его по фазе на угол  $\phi$ .

Сила тока

$$I = I_m \cos(\omega t - \phi). \quad (10.7.14)$$

### 10.8. Резонансы в цепи переменного тока

**Резонанс напряжений.** Явление резонанса возникает также и в электромагнитном контуре, т. е. в цепи переменного тока, при условии совпадения частоты  $\omega$  переменного напряжения с собственной частотой  $\omega_0$ :

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (10.8.1)$$

При этом величины сопротивлений равны  $R_L = R_C$ , т. е.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.8.2)$$

Полное сопротивление цепи становится минимальным:

$$Z = Z_{\min} = R,$$

а амплитуда тока достигает максимума:

$$I_m = (I_m)_{\max} = \frac{U_m}{R}. \quad (10.8.3)$$

Разность фаз обращает в ноль,  $\phi = 0$ , т. е. изменения тока и напряжения  $U$  синфазны. Напряжение на резисторе  $U_R = U$ .

Напряжения на катушке индуктивности  $U_L$  и на конденсаторе  $U_C$  противоположны по фазе и равны по величине (см. рис. 10.8.1)

$$(U_L)_{\text{рез}} = (U_C)_{\text{рез}} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = QU_m, \quad (10.8.4)$$

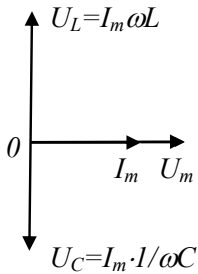


Рис. 10.8.1

$Q$  – добротность контура.

Добротность обычных колебательных контуров  $Q > 1$ , поэтому резонансные напряжения на катушке и конденсаторе превышают напряжение  $U_m$ , подводимое к цепи.

Это явление называется резонансом напряжений или последовательным резонансом.

Резонанс напряжений применяется в колебательных контурах радиотехнических устройств для усиления колебаний определенной частоты.

**Резонанс токов.** Явление резонанса токов возникает в цепи с параллельным включением конденсатора  $C$  и катушки индуктивности  $L$  (см. рис. 10.8.2).

Активное сопротивление мало, и им можно пренебречь, полагая  $R \approx 0$ .

Рассмотрим протекание тока через катушку индуктивности.

Согласно п. 10.7 сила тока через катушку

$$I_1 = I_{m_1} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{m_1} \cos(\omega t - \phi_1), \quad (10.8.5)$$

ток отстает по фазе от напряжения на  $\pi/2$ ,  $\left(\phi_1 = \frac{\pi}{2}\right)$  (см. рис. 10.8.2).

При протекании тока через конденсатор сила тока (см. гл. 10.7)

$$I_2 = I_{m_2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{m_2} \cos(\omega t - \phi_2), \quad (10.8.6)$$

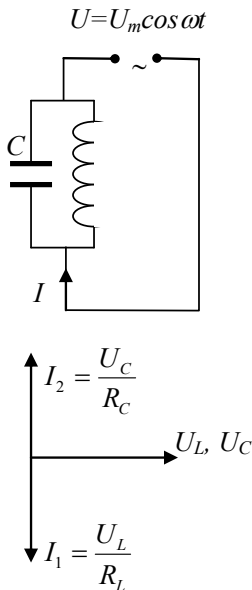


Рис. 10.8.2

т. е. ток опережает напряжение на  $\pi/2$ , ( $\phi_2 = -\pi/2$ ).

Разность фаз между двумя этими токами в ветвях цепи составляет величину

$$\phi^* = \phi_1 - \phi_2 = \pi, \quad (10.8.7)$$

т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Поэтому амплитуда силы тока во внешней, неразветвленной части цепи равна разности

$$I_m = I_{m_1} - I_{m_2}, \text{ где } I_{m_1} = \frac{U_m}{R_L} \text{ и } I_{m_2} = \frac{U_m}{R_C},$$

тогда

$$U_m \left( \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_C} \right) = U_m \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right). \quad (10.8.8)$$

При условии

$$\omega = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (10.8.9)$$

получаем

$$I_{m_1} = I_{m_2}, \quad I_m = 0,$$

и сила тока во внешней цепи  $I_m$  падает до нуля.

В реальной цепи, когда активное сопротивление  $R \neq 0$ , разность фаз  $\phi^* \neq \pi$ , и  $I_m \neq 0$ , но при резонансе амплитуда силы тока во внешней цепи достигнет минимума. При этом величины токов  $I_{m_1}$  и  $I_{m_2}$  могут быть значительно больше тока  $I_m$ . Следовательно, данный контур оказывает большое сопротивление переменному току при резонансной частоте.

Резонанс токов используется в индукционных печах для получения силы тока в катушке индуктивности значительно большей, чем в питающей цепи, что усиливает вихревые токи в металле; в радиотехнике и др.



## 10.9. Работа и мощность цепи переменного тока

Работа и мощность, выделяющаяся в цепи переменного тока, определяется аналогично формулам для цепи постоянного тока.

Элементарная работа тока

$$dA = Udq = UI dt = P dt, \quad (10.9.1)$$

$$U = U_m \cos \omega t, I = I_m \cos(\omega t - \phi), I_m = \frac{U_m}{Z}, P = \frac{dA}{dt} = UI,$$

это мгновенная мощность переменного тока, являющаяся гармонической функцией времени.

Работа переменного тока в течение времени  $t$

$$A = \int_0^t UI dt = \int_0^t P dt. \quad (10.9.2)$$

Мгновенная мощность тока с учетом выражений напряжения и тока примет вид

$$\begin{aligned} P &= U_m \cos(\omega t) I_m \cos(\omega t - \phi) = \\ &= I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \phi). \end{aligned} \quad (10.9.3)$$

Для практических целей применяется активная (средняя) мощность, равная среднему за период  $T$  значению мгновенной мощности:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \phi, \quad (10.9.4)$$

или

$$\langle P \rangle = I_0 U_0 \cos \phi, \quad (10.9.5)$$

$I_0 = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  – эффективное или действующее значение тока;

$U_0 = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  – эффективное (действующее) значение напряжения;

$\cos \phi$  – коэффициент мощности,  $\cos \phi = \frac{R}{Z}$ .

Приборы, применяемые для измерения силы тока и напряжения, градуируются по их эффективным значениям.

Если величина  $\cos \phi$  мала, мощность выделяемая в цепи переменного тока также мала, т. е. цепь неэффективна. Поэтому для стандартной сети переменного тока допустимое значение коэффициента мощности должно быть не ниже 0,85,  $\cos \phi \geq 0,85$ .

Эффективное значение силы тока определяется как среднее квадратичное значение за период  $T$ :

$$I_3 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad (10.9.6)$$

аналогично определяется эффективное значение напряжения цепи.

Работа переменного тока в течение времени  $t$  определяется в виде

$$A = \langle P \rangle t = I_3 U_3 t \cos \phi = \frac{U_3}{Z} U_3 t \frac{R}{Z} = \frac{U_3^2}{Z^2} R t. \quad (10.9.7)$$

### 10.10. Сложение двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами и направлением. Биения

Колебательная система может участвовать одновременно в двух или нескольких колебаниях. Определение закона результирующего колебания системы или сложение колебаний производится методом векторной диаграммы.

Система участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты и направления  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varepsilon_1) = A_1 \cos \phi_1, \\ S_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varepsilon_2) = A_2 \cos \phi_2. \end{aligned} \quad (10.10.1)$$

Результирующее колебание есть их сумма

$$S = S_1 + S_2 = A \cos(\omega t + \varepsilon) = A \cos \phi, \quad (10.10.2)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

и является также гармоническим с той же частотой  $\omega$ . Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varepsilon$  определяются из векторной диаграммы (см. рис. 10.10.1),

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (10.10.3)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2}{A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2}. \quad (10.10.4)$$

Величина амплитуды  $A$  зависит от разности фаз  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$  и изменяется от  $A_{\min}$  до  $A_{\max}$ :

$$A = A_{\min} = |A_1 - A_2|, \text{ если } (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (2k + 1)\pi,$$

$$A = A_{\max} = A_1 + A_2, \text{ если } (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 2k\pi. \quad ,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ , – целое число (10.10.5).

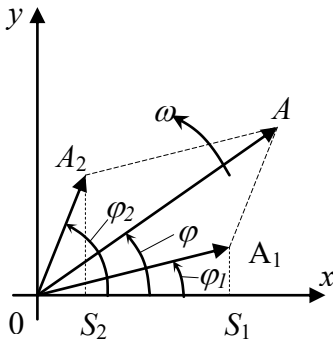


Рис. 10.10.1

Два гармонических колебания называются когерентными, если их разность фаз не зависит от времени:

$$\phi_1 - \phi_2 = \text{const},$$

$$\frac{d(\phi_1 - \phi_2)}{dt} = 0, \quad (10.10.6)$$

при этом частоты колебаний должны быть одинаковы,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Если система участвует в двух гармонических колебаниях, частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  близки,

т. е.  $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1) \ll \omega_1$ , результирующее колебание является негармоническим и называется биениями.

Начало отсчета времени примем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний совпали и были равны нулю, т. е.

$$S_1 = A_1 \cos \omega_1 t, S_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos(\omega_1 t + \alpha). \quad (10.10.7)$$

$$\alpha = \alpha(t) = \Delta\omega t, \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

При сложении получается колебание

$$S = A \cos(\omega_1 t + \varepsilon), \quad (10.10.8)$$

$A=A(t)$  – амплитуда колебаний

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \alpha, \quad (10.10.9)$$

$\varepsilon =\varepsilon(t)$  – начальная фаза

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A_2 \sin \alpha}{A_1 + A_2 \cos \alpha}. \quad (10.10.10)$$

Если амплитуды равны,  $A_1=A_2$ , получаем

$$A^2 = 2A_1^2 + 2A_1^2 \cos \alpha = 2A_1^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$A = 2A_1 \cos \frac{\alpha}{2} = 2A_1 \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t = 2A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t, \quad (10.10.11)$$

амплитуда колебаний медленно изменяется со временем. Начальная фаза

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A_1 \sin \alpha}{A_1 + A_1 \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta\omega}{2} t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot t. \quad (10.10.12)$$

Уравнение колебаний примет вид

$$S = 2A_1 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \quad (10.10.13)$$

или, поскольку  $\Delta\omega \ll \omega_1$ ,

$$S = A(t) \cos \omega_1 t, \quad (10.10.14)$$

есть уравнение биений. Амплитуда биений  $A(t)$  изменяется с частотой  $\omega_\delta = \Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$  и с периодом биений:

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_\delta} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (10.10.15)$$

## 10.11. Сложение нескольких гармонических колебаний. Гармонический анализ

При сложении нескольких колебаний  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ , имеющих одинаковое направление и кратные частоты  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n\omega$ , возникают сложные периодические негармонические колебания  $S$  с периодом

$$T = 2\pi/\omega,$$

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = S(t). \quad (10.11.1)$$

В соответствии с теоремой Фурье, любое сложное периодическое колебание  $S = S(t)$  можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний, циклические частоты которых кратны основной частоте  $\omega$ . Это представление функции  $S(t)$  называется разложением в ряд Фурье или гармоническим анализом сложного колебания и имеет вид

$$\begin{aligned} S = S(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varepsilon_n), \end{aligned} \quad (10.11.2)$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega t dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega t dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Члены ряда (10.11.2), соответствующие циклическим частотам  $\omega, 2\omega, 3\omega$  и так далее, называются первой (основной), второй, третьей гармониками и т. д.

## 10.12. Сложение двух взаимноперпендикулярных колебаний одинаковой частоты

Некоторая материальная точка  $M$  участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях

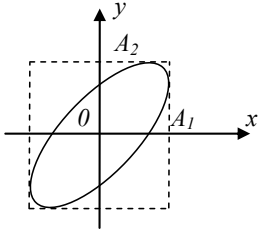


Рис. 10.12.1

$$x = A_1 \sin(\omega t + \phi_1),$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \phi_2). \quad (10.12.1)$$

Исключая из этих уравнений время  $t$ , находим уравнение траектории, по которой движется точка  $M$  в плоскости  $OXY$ . Она представляет собой эллипс:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) =$$

$$= \sin^2(\phi_2 - \phi_1), \quad (10.12.2)$$

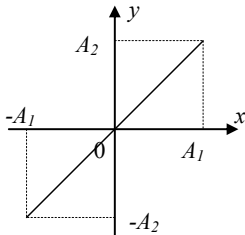


Рис. 10.12.2

точка  $M$  проходит этот эллипс за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Такое движение называется эллиптически поляризованными колебаниями (см. рис. 10.12.1).

Частные случаи:

если  $(\phi_2 - \phi_1) = k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , эллипс вырождается в прямую

$$y = \pm \frac{A_2}{A_1} x, \quad (10.12.3)$$

по которой колеблется точка  $M$  с амплитудой  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  и частотой  $\omega$  (см. рис. 10.12.2).

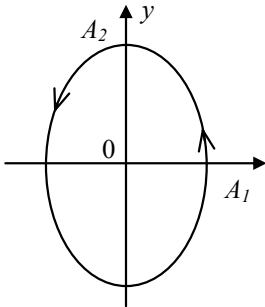


Рис. 10.12.3

Если  $(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ ,

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , траектория точки  $M$  примет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (10.12.4)$$

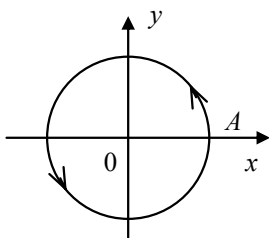


Рис. 10.12.4

эллипс, полуоси которого  $a = A_1$ ,  $b = A_2$  совпадают с осями координат (см. рис. 10.12.3).

Если

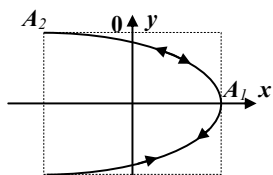
$$(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\pi}{2}(2k + 1), (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

и  $A_1 = A_2 = A$ , траектория точки  $M$  – окружность (см. рис. 10.12.4),

$$x^2 + y^2 = A^2. \quad (10.12.5)$$

### 10.13. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами

Точка  $M$  участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях

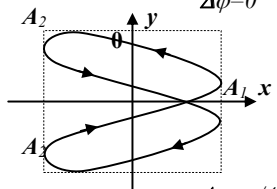


$$x = A_1 \sin(p\omega t + \phi_1) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1),$$

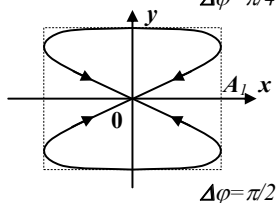
$$y = A_2 \sin(q\omega t + \phi_{21}) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2),$$

$$(10.13.1)$$

$p$  и  $q$  – целые числа;  $\omega_1 = p\omega$ ;  $\omega_2 = q\omega$ .



Траектория точки  $M$  является замкнутой сложной кривой, вид которой повторяется через период времени  $T$ , являющийся наименьшим общим кратным периодов колебаний по осям  $Ox$  и  $Oy$

$$T_1 = 2\pi/\omega_1 \text{ и } T_2 = 2\pi/\omega_2.$$


Формы траектории точки  $M$  зависят от соотношений амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$ , частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и разности фаз  $\phi_1$  и  $\phi_2$  обоих колебаний ( $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ ). Эти траектории называются фигурами Лиссажу. Их примеры даны на рис. 10.13.1 при соотношении  $p/q = 1/2$ .

Рис. 10.13.1. Фигуры Лиссажу при значениях  $p/q = 1/2$

## 10.14. Волновые процессы. Виды волн

Колебательное движение, проходящее в некоторой точке упругой среды, передается от одной точки к другой в результате взаимодействия между частицами среды.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде или в пространстве – физическом, называется *волновым процессом* или *волной*.

Волны можно разделить на три вида: упругие волны, волны на поверхности жидкости, электромагнитные волны. Волны на поверхности жидкости изучаются в курсах гидродинамики.

*Упругие (механические) волны* – процесс распространения деформаций (возмущений) в упругой среде.

Упругая среда – такая среда, в которой упругие деформации исчезают после снятия внешних нагрузок. Упругие волны могут распространяться в твердой, жидкой и газообразной средах.

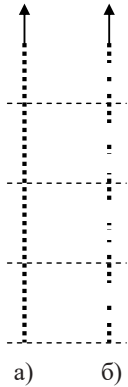


Рис. 10.14.1. Продольная волна:  
а) невозмущенная среда;  
б) продольная волна сжатия

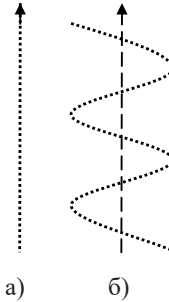


Рис. 10.14.2. Поперечная волна:  
а) невозмущенная среда;  
б) поперечная волна

По направлению колебаний частиц среды *волны* делятся на *продольные* и *поперечные*. *Продольные волны* – такие, в которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны (см. рис. 10.14.1).

*Поперечные волны* – такие, в которых колебания частиц среды происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (см. рис. 10.14.2).



Продольные волны могут возникать в твердых, жидких и газообразных средах, в которых возникают упругие деформации растяжения и сжатия. Такие среды обладают упругостью объема, т. е. упругие силы возникают в них при изменении объема.

Поперечные волны возбуждаются в твердых средах, где возникают упругие деформации сдвига. Такие среды обладают упругостью формы, в них упругие силы возникают при изменении формы тела.

По характеру распространения в пространстве волны делятся на плоские, цилиндрические и сферические.

Волна называется *гармонической*, если ее уравнение описывает гармонические колебания частиц среды.

### 10.15. Уравнение волны

В упругой среде возникают гармонические колебания в точке  $O$ , называемой источником колебаний, по закону

$$S_0 = A \sin(\omega t + \varepsilon_0). \quad (10.15.1)$$

В процессе распространения колебаний волна приходит в некоторую точку  $M$  с опозданием по времени  $t^* = x/v$ , здесь  $x$  – расстояние  $OM$  в невозмущенной среде,  $v$  – скорость распространения волны (см. рис. 10.15.1).

Следовательно, уравнение колебаний в точке  $M$ , или уравнение незатухающей гармонической волны запишется в виде

$$S = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varepsilon_0 \right] \quad (10.15.2)$$

или

$$S = A \sin [\omega t - kx + \varepsilon_0], \quad (10.15.3)$$

здесь  $A$  – амплитуда волны;  $\omega = 2\pi/T$  – циклическая частота волны;  $T$  – период;  $x$  – координата точки  $M$  среды;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda$  – длина волны,  $\lambda = vT$ .

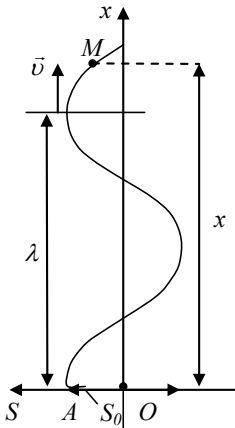


Рис. 10.15.1

Длина волны  $\lambda$  – расстояние между двумя ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

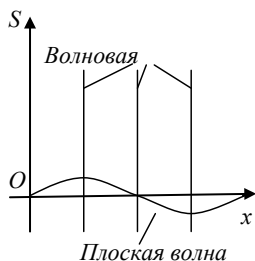


Рис. 10.15.2

и в общем случае

$$S = A \sin[\omega t \pm kx + \epsilon_0]. \quad (10.15.5)$$

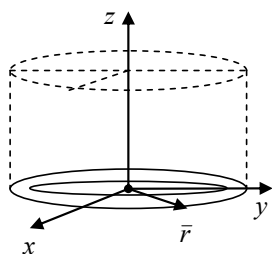


Рис. 10.15.3.

Цилиндрическая волна

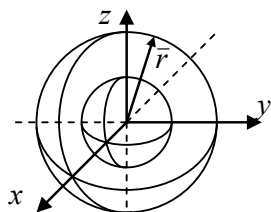


Рис. 10.15.4

Скорость волны  $v$  – фазовая скорость, определяет как быстро перемещается фаза волны, или, иначе, это скорость движения некоторой геометрической точки, связанной с данной фазовой точкой волны, например, с гребнем волны.

Если волна движется против оси  $X$ , то ее уравнение имеет вид

$$S = A \sin[\omega t + kx + \epsilon_0], \quad (10.15.4)$$

Положение волны в пространстве определяется волновым фронтом. *Волновой фронт* – геометрическое место точек, наиболее удаленных от источника волн, до которых дошли колебания в данный момент времени. Иначе, это есть передняя волновая поверхность.

*Волновая поверхность* – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Форма волновой поверхности определяет тип волны; если волновая поверхность представляет собой плоскость – волна называется плоской, если волновая поверхность – цилиндр, волна цилиндрическая, если волновая поверхность – сфера, волна называется сферической (см. рис. 10.15.2–10.15.4).

Уравнение сферической волны имеет вид

$$S = A \sin(\omega t - kr + \varepsilon_0), \quad (10.15.6)$$

$A = \frac{A_0}{r}$ , – амплитуда волны;  $r$  – величина радиус-вектора точки

среды, проведенного из точечного источника волн.

Амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию  $r$ , поскольку энергия колебаний распределяется по мере удаления волны от точечного источника (центра сферы) во все большем объеме среды, в которой отсутствует поглощение энергии.

В общем случае распространение волн в однородной изотропной среде подчиняется волновому уравнению

$$\Delta S = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (10.15.7)$$

или

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (10.15.8)$$

Для плоской волны уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (10.15.9)$$

Решением этого уравнения является любая волна вида  $S = f(t \mp x/V)$ , и, в частности, волна

$$S = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{V} \right) + \varepsilon_0 \right]. \quad (10.15.10).$$

Уравнение волны в комплексной форме:

$$S(x, t) = A e^{i(\omega t \pm kx + \varepsilon_0)}.$$

## 10.16. Интерференция волн

В одной и той же среде могут распространяться одновременно несколько волн. В этом случае к ним применяется принцип суперпозиции: результирующее возмущение среды равно сумме возмущений каждой волны в отдельности. Такая среда называется линейной, т. е. ее свойства не изменяются под действием нескольких волн.

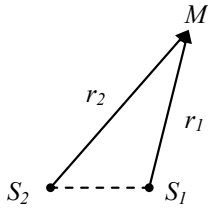


Рис. 10.16.1

Волны называются *когерентными*, если разность их фаз постоянна во времени,  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \text{const}$ . При этом частоты их должны быть одинаковы,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

*Интерференция волн* – явление усиления или ослабления результирующей волны при наложении двух или более когерентных волн, происходящее в разных точках среды,

в зависимости от разности фаз волн в этих точках.

Рассмотрим две когерентные волны:

$$S_1 = A_1 \sin(\omega t - kr_1 + \varepsilon_1) = A_1 \sin \phi_1, S_2 = A_2 \sin(\omega t - kr_{21} + \varepsilon_2) = A_2 \sin \phi_2, \quad (10.16.1)$$

и найдем условия усиления или ослабления волн при их наложении в некоторой точке  $M$  (см рис. 10.16.1).

Амплитуда результирующей волны

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_1 - r_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] =: A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi. \quad (10.16.2)$$

$\Delta\phi = k \cdot \Delta r - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \text{const}$  – разность фаз в т.  $M$ ;  $\Delta r = r_1 - r_2$ , – разность хода волн.

В точках среды, в которых амплитуда результирующей волны становится максимальной или минимальной:

$$A_{\max} = A_1 + A_2, A_{\min} = |A_1 - A_2|, \quad (10.16.3)$$

наблюдается интерференционный максимум или минимум, т. е. усиление или ослабление волны в зависимости от величины разности фаз  $\Delta\phi$ :

$$A_{\max}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2, \\ A_{\min}^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2.$$

Условием интерференционного максимума и минимума является

$$\Delta\phi_{\max} = k \cdot \Delta r - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \pm 2m\pi, m = 0, 1, 2, \dots \quad (10.16.4)$$

$$\Delta\phi_{\min} = k \cdot \Delta r - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \pm(2m+1)\pi, m = 0, 1, 2, \dots \quad (10.16.5)$$

Если начальные фазы колебаний обоих источников волн равны,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , то  $\Delta\phi = k \cdot \Delta r$ , и тогда условия максимума и минимума амплитуды соответственно примут вид

$$k \cdot \Delta r_{\max} = \pm 2m\pi, \Delta r_{\max} = \pm m\lambda = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (10.16.6)$$

$$k \cdot \Delta r_{\min} = \pm(2m+1)\pi, \Delta r_{\min} = \pm(2m+1) \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (10.16.7)$$

### 10.17. Стоячие волны

Стоячие волны возникают в результате наложения двух волн, имеющих одинаковые частоты и амплитуды, бегущих навстречу друг другу.

Рассмотрим две встречные волны, распространяющихся вдоль оси  $x$ :

$$S_1 = A \sin(\omega t - kx) = A \sin \phi_1, S_2 = A \sin(\omega t + kx + \alpha) = A \sin \phi_2. \quad (10.17.1)$$

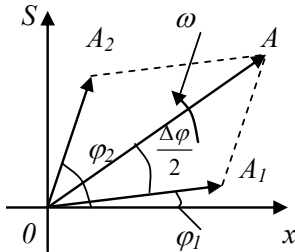


Рис. 10.17.1

В результате их интерференции возникает результирующая волна

$$S = S_1 + S_2, \quad S = A \cdot \sin \phi. \quad (10.17.2)$$

Амплитуда  $A$  и фаза  $\phi$  определяются с помощью векторной диаграммы (см. рис. 10.17.1):

$$A^2 = A^2 + A^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) = 2A^2(1 + \cos \Delta\phi) = 4A^2 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2},$$

$$A = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2}, \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2kx + \alpha,$$

$$A = 2A \cos\left(\frac{2kx + \alpha}{2}\right) = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right), \quad (10.17.3)$$

$$\phi = \phi_1 + \frac{\Delta\phi}{2} = \omega t + \frac{\alpha}{2}. \quad (10.17.4)$$

Получаем уравнение волны

$$S = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (10.17.5)$$

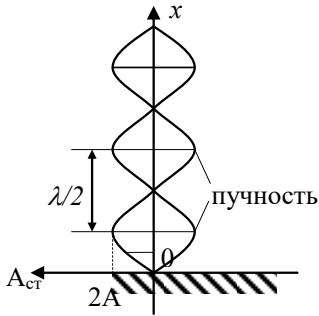


Рис. 10.17.2. Стоячая волна на границе с более плотной средой

Если начало отсчета времени выбрано так, что  $\alpha = 0$ , уравнение стоячей волны примет вид

$$\begin{aligned} S &= 2A \cos kx \cdot \sin \omega t = \\ &= A_c \sin \omega t = A_c \sin \phi, \\ A_c &= |2A \cos kx|, \quad (10.17.6) \end{aligned}$$

здесь  $A_c$  есть амплитуда стоячей волны.

Точки волны, в которых  $A_c = 0$ , называются узлами, точки, где  $A_c = 2A$  называются пучностями (см.

рис. 10.17.2). Положение узлов и пучностей определяется из формул:

$$kx_{\text{узел}} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, kx_{\text{пуч}} = \pm m\pi. \quad (10.17.7)$$

Расстояние между соседними узлами или пучностями равно длине стоячей волны

$$\lambda_c = \frac{1}{2}\lambda, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (10.17.8)$$

Все точки волны, находящиеся между соседними узлами, колеблются с разными амплитудами  $A_c$ , зависящими от координаты  $x$ , но в одной фазе  $\phi = \omega t$ .

Энергия, переносимая стоячей волной за период, равна нулю, поскольку две встречные волны несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Отсюда появился термин «стоячая волна». Между соседними узлами при этом происходит взаимопревращение кинетической и потенциальной энергии.

Стоячие волны образуются при наложении (интерференции) падающей и отраженной волн на границе двух сред. Если среда, от которой отражается падающая волна, более плотная, то на границе сред образуется узел стоячей волны (см. рис. 10.17.2).

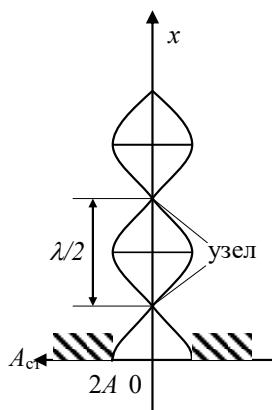


Рис. 10.17.3. Стоячая волна на границе с менее плотной средой

Если среда, от которой отражается падающая волна, менее плотная, то на границе сред возникает пучность (см. рис. 10.17.3).

Примеры стоячих волн:

- колебания веревки с одним закрепленным концом;
- колебания музыкальной струны;
- колебания стержня с одним закрепленным концом (или с двумя);
- звуковые колебания в столбе газа (в духовых музыкальных инструментах).

## 10.18. Звуковые волны

Звуковые или акустические волны есть упругие волны в различных средах, имеющие частоту  $\nu$  от 16 Гц до 20 000 Гц.

Колебания при частотах  $\nu < 16$  Гц называются инфразвуком, а при  $\nu > 20\,000$  Гц – ультразвуком, и эти колебания слух человека не воспринимает.

Звуковые волны являются волнами сжатия, т. е. деформации. Закон Гука для объемной деформации среды имеет вид

$$dp = -K \frac{dQ}{Q}, \quad (10.18.1)$$

$dp$  – изменение давления;  $dQ$  – изменение объема  $Q$ ;  $K$  – модуль объемной упругости среды.

Процесс распространения звуковых волн является близким к адиабатическому, и зависит от упругих свойств среды. Фазовая скорость звуковых волн в газе или жидкости определяется по формуле

$$v = \sqrt{K/\rho}, \quad (10.18.2)$$

$\rho$  – плотность среды. При медленном изотермическом сжатии ( $pQ = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ ). При быстром сжатии (адиабатический процесс,  $pQ^\gamma = \text{const}$ ) модуль упругости  $K = \gamma \cdot p$ .

Для звуковых волн в газе скорость звука

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot RT}{M}}, \quad (10.18.3)$$

$\gamma = C_p/C_v$  – показатель адиабаты;  $R$  – газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура;  $M$  – молярная масса газа.

Фазовая скорость поперечной звуковой волны в однородной твердой упругой среде

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (10.18.4)$$

$G$  – модуль сдвига, зависящий от упругих свойств среды.

Аналогично определяется скорость звука в тонком стержне при продольных колебаниях:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (10.18.5)$$

$E$  – модуль Юнга, а также скорость звука при поперечных колебаниях струны

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (10.18.6)$$

$\sigma = F/S$  – напряжение;  $F$  – сила натяжения струны;  $S$  – площадь поперечного сечения ее.

Способности каждого человека воспринимать звуки являются индивидуальными. С целью объективной оценки звука были введены следующие физические величины:

*Интенсивность звука*  $I$  – средняя по времени энергия, переносимая звуковой волной в единицу времени, через единичную площадку, нормальную направлению распространения волны:

$$I = \frac{W}{St}, \quad (10.18.7)$$

*Уровень интенсивности (громкости) звука* – величина, определяемая по формуле:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (10.18.8)$$



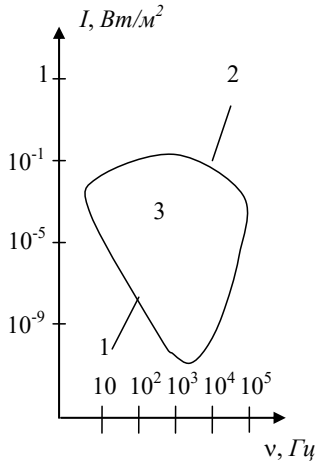


Рис. 10.18.1:

- 1 – порог слышимости;
- 2 – болевой порог;
- 3 – область слышимости

$I$  – интенсивность звука;  $I_0$  – порог слышимости, принимаемый для всех звуков одинаковым,  $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$  (см. рис. 10.18.1);  $[L] = 1 \text{ Б(бел)} = 10 \text{ дБ(децибел)}$   $1 \text{ ДБ} = 10^{-1} \text{ Б}$

Уровень громкости, измеряемый в фонах – физиологическая характеристика громкости; 1 фон соответствует громкости звука с частотой  $\nu = 1000 \text{ Гц}$  при уровне его интенсивности  $L = 1 \text{ дБ}$ .

Особый вид звуковых волн представляет собой ультразвук. Высокие частоты ( $\nu > 20 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ ) и малые длины волн позволяют генерировать ультразвук в виде узких пучков – лучей, что обуславливает

их особые свойства и широкое применение.

Ультразвук может быть получен с помощью генераторов, действие которых основано на явлениях обратного пьезоэффекта, магнитострикции, а также с помощью сирены.

Области применения ультразвука очень многочисленны, наиболее важные из них:

- гидролокация (эхолот);
- дефектоскопия, т. е. определение дефектов внутри деталей с помощью ультразвука;
- диагностика в медицине (ультразвуковой томограф), ультразвуковая хирургия;
- акустоэлектроника;
- технологические процессы (ускорение химических реакций, получение эмульсий, механическая обработка хрупких и твердых материалов и т. д.);
- воздействие на биологические процессы (ускорение обмена веществ, микромассаж);
- воздействие на процессы кристаллизации, диффузии, тепло- и массообмена в металлургических и других технологиях.

## 10.19. Эффект Доплера

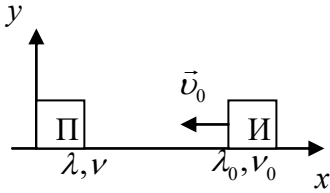


Рис. 10.19.11

Эффектом Доплера называется изменение частоты звуковых колебаний, регистрируемых приемником, вследствие движения источника и приемника звука.

Рассмотрим различные случаи движения приемника и источника звука в неподвижной среде вдоль оси  $x$ .

Источник и приемник звука покоятся относительно среды,  $v_{ист} = 0, v_{пр} = 0$  (см. рис. 10.19.1). От источника колебаний распространяются звуковые волны со скоростью  $v = v_0$ :

$$v_0 = \frac{\lambda_0}{T} = \nu_0, \quad \nu_0 = \frac{1}{T}. \quad (10.19.1)$$

$\lambda_0, \nu_0$  – длина и частота звука неподвижного источника.

Приемник звука зарегистрирует колебания с частотой

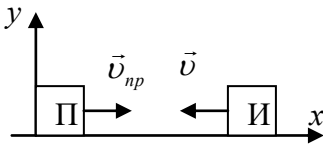


Рис. 10.19.2:  
П – приемник звука;  
И – источник звука

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \nu_0, \quad (10.19.2)$$

т. е. без всяких изменений, т. к.  $\nu = \nu_0, \lambda = \lambda_0$ .

Приемник звука движется к источнику,  $v_{пр} > 0, v_{ист} = 0$  (см. рис. 10.19.2).

В таком случае скорость волны относительно приемника равна сумме скорости волны  $v_0$  в неподвижной среде и скорости  $v_{пр}$ :

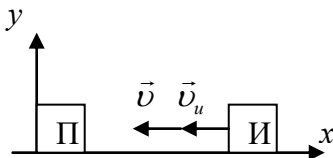


Рис. 10.19.3

$$v = v_0 + v_{пр}. \quad (10.19.3)$$

Воспринимаемая приемником частота звука

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0 + v_{пр}}{\lambda} = \frac{v + v_{пр}}{vT} = \frac{v + v_{пр}}{v} \nu_0, \quad (10.19.4)$$

т. е. возрастает по сравнению с исходной частотой  $\nu_0$ .

Источник звука движется к приемнику,  $\nu_{ист} > 0$ ,  $\nu_{пр} = 0$  (см. рис. 10.19.3).

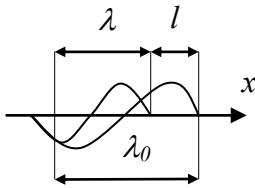


Рис. 10.19.4

Длина волны при неподвижном источнике  $\lambda_0 = \nu T$ . Однако если источник движется, он пройдет за время  $T$  расстояние  $l = \nu_{ист} T$ , поэтому длина волны сократится и будет равна разности  $\lambda_0$  и  $l$  (см. рис. 10.19.4):

$$\lambda = \lambda_0 - l = \lambda_0 - \nu_{ист} T = (\nu - \nu_{ист}) T. \quad (10.19.5)$$

Воспринимаемая приемником частота звука

$$\nu = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{(\nu - \nu_{ист}) T} = \frac{\nu}{\nu - \nu_{ист}} \nu_0 \quad (10.19.6)$$

возрастает по сравнению с  $\nu_0$ .

В общем случае, когда движутся оба прибора,  $\nu_{ист} \neq 0$ ,  $\nu_{пр} \neq 0$ , частота звука, воспринимаемая приемником

$$\nu = \frac{\nu \pm \nu_{пр}}{\nu \mp \nu_{ист}} \nu_0, \quad (10.19.7)$$

здесь верхний знак в числителе и знаменателе соответствует сближению источника и приемника звука, а нижний знак – их удалению друг от друга.

## 10.20. Энергия волн. Мощность волны

Энергия, переносимая волной, зависит от времени, т. е. фазы колебаний в данной точке среды. Поэтому применяются характеристики, усредненные по периоду волны.

1. Средняя энергия волны:

$$W_{cp} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2, \quad (10.20.1)$$

$m$  – масса выделенного объема  $Q$  среды;  $A$  – амплитуда волны;  $\omega$  – циклическая частота.

## 2. Средняя объемная плотность энергии волны

$$w_{cp} = \frac{W_{cp}}{Q} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (10.20.2)$$

## 3. Интенсивность волны

$$I = w_{cp} V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 V,$$

есть энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Следовательно, интенсивность волны можно представить в виде

$$I = \frac{W_{cp}}{St} = \frac{W_{cp} v}{Stv} = \frac{W_{cp}}{Q} v = w_{cp} v. \quad (10.20.3)$$

## 4. Мощность волны

$$P_{cp} = IS, \quad (10.20.4)$$

есть энергия, переносимая волной в единицу времени через поверхность площадью  $S$ , нормальную направлению распространения волны.

**Мгновенная энергия волны.** Объемная плотность энергии упругих волн есть объемная плотность механической энергии среды, обусловленная распространением волн в среде, равная сумме объемных плотностей кинетической энергии и потенциальной энергии упругодеформированной среды. Объемная плотность кинетической энергии среды

$$w_k = \frac{dW_k}{dQ} = \frac{1}{2} \rho v_1^2,$$

$dW_k$  – кинетическая энергия всех частиц в элементарном объеме  $dQ$  среды;  $v_1$  – скорость частиц, одинаковая по всему этому объему.

Объемная плотность потенциальной энергии упругодеформированной среды

$$w_p = \frac{dW_p}{dQ} = \frac{1}{2} \rho v^2 \varepsilon^2,$$

$dW_p$  – потенциальная энергия упругой деформации элементарного объема;  $v$  – фазовая скорость волны;  $\varepsilon$  – относительная деформация.

Для плоской бегущей гармонической волны объемная плотность энергии имеет вид

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx + \phi_0) = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 [1 + \cos 2(\omega t - kx + \phi_0)]. \quad (10.20.5)$$

Для сферической волны

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kr + \phi_0), \quad (10.20.6)$$

здесь  $A = \frac{A_0}{r}$ .

# Глава 11. Электромагнитные волны. Свет

## 11.1. Электромагнитные волны. Уравнение волны

Электромагнитные волны представляют собой переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.

Теоретический вывод о распространении электромагнитного поля в виде волн следует из уравнений Максвелла (1865).

Экспериментально существование электромагнитных волн доказали опыты Г. Герца (1888), а затем – А. Попова, осуществившего радиосвязь (1895).

Электромагнитные волны делятся на несколько основных диапазонов в соответствии с длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\nu$ :

*Радиоволны*  $\lambda = 10^3 \dots 10^4$  м,  $\nu = 3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^{12}$  Гц.

*Световые волны*, которые делятся на поддиапазоны:

– инфракрасное излучение:  $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \dots 8 \cdot 10^{-7}$  м,  
 $\nu = 6 \cdot 10^{11} \dots 3,75 \cdot 10^{14}$  Гц;

– видимый свет:  $\lambda = 8 \cdot 10^{-7} \dots 4 \cdot 10^{-7}$  м,  $\nu = 3,75 \cdot 10^{14} \dots 7,5 \cdot 10^{14}$  Гц;

– ультрафиолетовое излучение:  $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \dots 10^{-9}$  м,  
 $\nu = 7,5 \cdot 10^{14} \dots 3 \cdot 10^{17}$  Гц

*Рентгеновское излучение*:  $\lambda = 2 \cdot 10^{-9} \dots 6 \cdot 10^{-12}$  м,  
 $\nu = 1,5 \cdot 10^{17} \dots 5 \cdot 10^{19}$  Гц.

*$\gamma$ -излучение*:  $\lambda < 6 \cdot 10^{12}$  м,  $\nu > 5 \cdot 10^{19}$  Гц.

Уравнения электромагнитного поля для однородной изотропной среды, удаленной от зарядов и токов, порождающих это поле, преобразуются в волновые уравнения

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (11.1.1)$$

Здесь  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$  – скорость волны в среде,

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  – скорость света в вакууме;  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  – показатель пре-

ломления среды.

## Формула фазовой скорости волны

$$v = \frac{c}{n}, \quad (11.1.2)$$

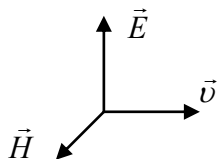


Рис. 11.1.1

указывает на тесную взаимосвязь оптических и электромагнитных явлений; в вакууме  $n = 1$  ( $\epsilon = 1, \mu = 1$ ) и  $v = c$ , электромагнитные волны распространяются со скоростью света.

Согласно уравнениям (11.1.1), электромагнитное поле распространяется в виде поперечных волн, в которых векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны, так что образуют с вектором  $\vec{v}$  правую тройку векторов (см. рис. 11.1.1, 11.1.2).

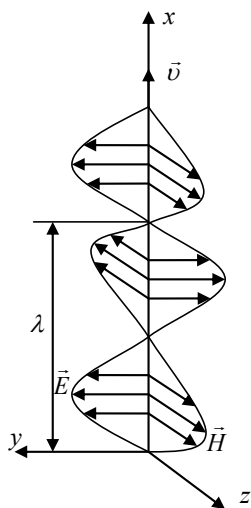


Рис. 11.1.2

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются синхронно (в одной фазе) и связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \cdot E = \sqrt{\mu_0 \mu} \cdot H. \quad (11.1.3)$$

В частном случае из (11.1.1) следует уравнение любой плоской волны вида

$$E_y = E_y(t - \frac{x}{v}), H_z = H_z(t - \frac{x}{v}), \quad (11.1.4)$$

при этом  $E_y \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_z \sqrt{\mu_0 \mu}$ .

Монохроматическая электромагнитная волна – гармоническая волна одной частоты  $\omega$  (см. рис. 11.1.2) имеет вид

$$E_y = E_{m1} \cos(\omega t - kx + \phi_1),$$

$$H_z = H_{m1} \cos(\omega t - kx + \phi_1). \quad (11.1.5)$$

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}.$$

Если колебания происходят в одной и той же плоскости, волна называется плоскополяризованной.

Электромагнитные волны обладают свойством дисперсии, поскольку скорость волны зависит от частоты,  $v = v(\omega) = v(\nu)$ . Соответственно, показатель преломления зависит от частоты,  $n = n(\omega) = n(\nu)$ . Длина волны

$$\lambda = vT = \frac{c}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}, \lambda_0 = \frac{c}{\nu},$$

– длина волны в среде меньше

длины  $\lambda_0$  в вакууме в  $n$  раз. Зависимость фазовой скорости волны от частоты называется дисперсией волн.

Поскольку  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , и для большинства веществ  $\mu \approx 1$ , то  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ , поэтому диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  также зависит от частоты волны  $\nu$ .

Опыт показывает, что физиологическое, фотохимическое и другие действия света на различные объекты вызываются колебаниями электрического вектора  $\vec{E}$ . Поэтому вектор  $\vec{E}$  называют также световым вектором.

## 11.2. Энергия электромагнитных волн.

### Импульс электромагнитного поля

Энергия, переносимая электромагнитной волной, равна энергии электромагнитного поля. Объемная плотность энергии поля

$$w = w_m + w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}BH,$$

или, с учетом соотношения (11.1.4)

$$w = 2w_m = 2w_e = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon\mu} \cdot EH = \frac{1}{v}EH. \quad (11.2.1)$$

Эта энергия переносится со скоростью  $\vec{v}$  и характеризуется вектором плотности потока энергии электромагнитной волны или вектором Умова – Пойнтинга

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (11.2.2)$$

величина плотности потока энергии поля

$$P = EH = wV, \quad (11.2.3)$$

поскольку  $\vec{E} \perp \vec{H}$ ,  $w = \frac{1}{v}EH$  – объемная плотность энергии поля.



Направление вектора  $\vec{P}$  совпадает с вектором  $\vec{v}$ .  
 Для плоской монохроматической волны

$$E = E_m \cos(\omega t - kx),$$

объемная плотность энергии

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (11.2.4)$$

является функцией времени.

Среднее значение за период  $T$  значение плотности энергии

$$w_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt, \quad w_{cp} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_m^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon A^2, \quad (11.2.5)$$

$A = E_m$  – амплитуда волны.

Переносимая волной энергия характеризуется интенсивностью волны  $I$ . Интенсивность волны численно равна средней за период энергии, переносимой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярную направлению движения волны:

$$I = w_{cp} v = P_{cp}. \quad (11.2.6)$$

Для монохроматической электромагнитной волны интенсивность

$$I = w_{cp} v = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon A^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} A^2. \quad (11.2.7)$$

Интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитуды электрического вектора  $E_m$ ,  $I \sim E_m^2 \sim A^2$ .

Электромагнитные волны оказывают давление на физические тела. Это давление возникает в результате появления силы Лоренца, действующей на заряженные частицы вещества на поверхности тела, которые под влиянием электромагнитного поля, т. е. начинают совершать упорядоченное движение.

Давление света на преграды экспериментально доказал П. Н. Лебедев (1899), что также является доказательством электромагнитной природы световых волн.

Существование давления электромагнитных волн на преграды означает, что электромагнитное поле имеет механический импульс  $p$

$$p = mc, \quad (11.2.8)$$

$m$  – масса поля;  $c$  – скорость света.

Энергия и масса поля связаны в соответствии с формулой Эйнштейна  $W = mc^2$ , поэтому импульс электромагнитного поля

$$p = \frac{W}{c}. \quad (11.2.9)$$

### 11.3. Основные законы геометрической оптики

Оптика – раздел физики, в котором изучаются природа света, законы излучения, распространения и взаимодействия света с веществом.

Оптические явления, которые основаны на волновой природе света, рассматриваются в волновой оптике. Явления, связанные с корпускулярной природой света, изучаются в квантовой оптике.

В основе геометрической оптики лежат четыре закона, связанные с представлениями о свете как о прямолинейно распространяющихся лучах.

Закон прямолинейного распространения света: в оптически однородной среде свет распространяется прямолинейно.

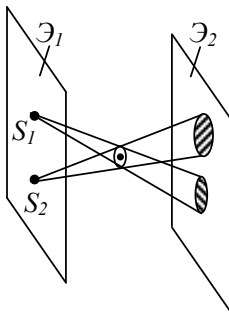


Рис. 11.3.1

Оптически однородная среда – среда, в которой свойства света не зависят от выбора направления.

Закон независимости световых лучей (пучков): действие отдельного пучка света не зависит от действия других пучков.

Этот закон справедлив в линейной оптике, при небольшой интенсивности света. Независимость лучей лазеров (лучей большой интенсивности) при их наложении не соблюдается (см. рис. 11.3.1).

Закон отражения света: отраженный от поверхности тела луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и с перпендикуляром к поверхности тела (границе раздела двух сред) в точке падения луча; при этом угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\beta$ ,  $\alpha = \beta$  (см. рис. 11.3.2).

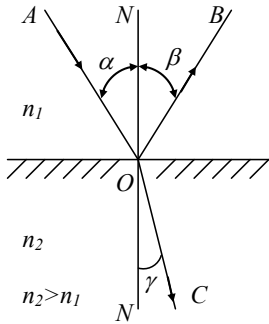


Рис. 11.3.2

Плоскость, содержащая падающий луч  $AO$  и перпендикуляр  $ON$  к поверхности раздела двух сред в точке падения, называется плоскостью падения.

Закон преломления света: преломленный луч лежит в плоскости падения, угол преломления связан с углом падения  $\alpha$  в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma, \quad (11.3.1)$$

$n_{21} = n_2/n_1$  – относительный показатель преломления второй среды по отношению к первой.

Поскольку абсолютный показатель преломления среды  $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$ , то закон (11.3.1) можно записать в виде

$$\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \sin \alpha = \sqrt{\epsilon_2\mu_2} \sin \gamma. \quad (11.3.2)$$

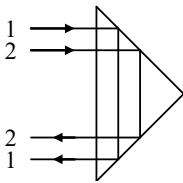
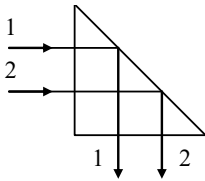


Рис. 11.3.3

Очевидно, из (11.3.1) следует вывод об обратимости светового луча: обратный луч пойдет по пути  $COA$  (см. рис. 11.3.2).

При распространении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную,  $n_1 > n_2$ , из закона (11.3.1) следует, что  $\gamma > \alpha$ , т. е. преломленный луч удаляется от нормали  $ON$  (см. рис. 11.3.2). При некотором значении угла падения  $\alpha_{\text{пр}}$  угол преломления достигает значения  $\gamma = \pi/2$ , следовательно, при  $\alpha > \alpha_{\text{пр}}$  весь падающий свет отражается, преломленный луч исчезает. Интенсивность падающего луча равна интенсивности отраженного луча, интенсивность преломленного луча равна нулю. Это явление называется полным внутренним отражением света (см. рис. 11.3.3, 11.3.4). Это явление имеет широкое применение: призмы полного внутреннего отражения, световоды, применяемые в волновой оптике и др.

Интенсивность отраженного луча, интенсивность преломленного луча равна нулю. Это явление называется полным внутренним отражением света (см. рис. 11.3.3, 11.3.4). Это явление имеет широкое применение: призмы полного внутреннего отражения, световоды, применяемые в волновой оптике и др.

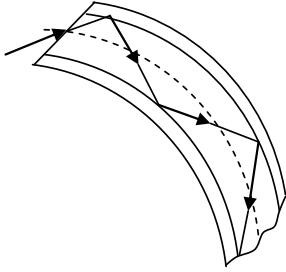


Рис. 11.3.4

Величина предельного угла определяется из соотношения

$$\sin \alpha_{np} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (11.3.3)$$

$\sin \alpha_{np} \leq 1, n_2 \leq n_1$ , при этом  $\sin \gamma = 1$ .

## 11.4. Интерференция света

Волновая оптика изучает такие явления, как интерференция, дифракция, дисперсия, поляризация света и другие, в которых проявляется волновая природа света.

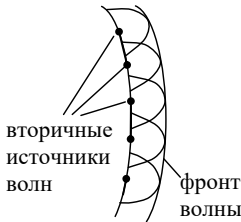


Рис. 11.4.1

В волновой теории света одним из основных является принцип Гюйгенса: каждая точка, до которой доходит волна, является центром вторичных волн, огибающая которых определяет положение волнового фронта в следующий момент времени (см. рис. 11.4.1).

Этот принцип позволяет построить фронт волны в момент времени  $(t + \Delta t)$  по известному положению фронта в момент времени  $t$ , а также объяснить распространение света за преградой с отверстием (см. рис. 11.4.2), вывести законы отражения и преломления света и др.

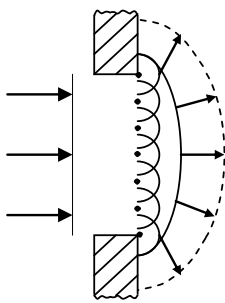


Рис. 11.4.2

Интерференция света объясняется с помощью интерференции волн, необходимым условием которой является когерентность волн (см. гл. 11.3).

Интерференция света – оптическое явление, возникающее при наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн (пучков), вследствие которого происходит перераспределение светового потока в области взаимодействия волн и появление максимумов и минимумов интенсивности света в различных точках.

В обычных условиях интерференция света не наблюдается, поскольку независимые источники света некогерентны, и их излучение немонохроматично. Это объясняется тем, что процесс излучения света различными атомами вещества не согласован. Каждый атом после возбуждения излучает свет в течение очень малого времени  $\tau \approx 10^{-8}$  с в виде цугов волн с частотами от  $\omega$  до  $(\omega + \Delta\omega)$ , независимо друг от друга. Разность фаз излучений атомов непостоянна, поэтому такие источники света некогерентны. Однако в течение короткого времени, называемого временем когерентности  $\tau_{\text{ког}} < \tau$ , можно приближенно принять, что луч (пучок) света получен от когерентных источников и является монохроматическим. За время когерентности

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\Delta\omega}, \quad \Delta\omega_0 \tau_{\text{ког}} = \pi, \quad (11.4.1)$$

волна проходит расстояние

$$l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}} = \pi v / \Delta\omega, \quad (11.4.2)$$

называемое длиной когерентности (длина монохроматического цуга). Для видимого солнечного света  $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-14}$  с – время когерентности,  $l_{\text{ког}} \approx 10^{-6}$  м – длина когерентности. Для лазера  $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-5}$  с,  $l_{\text{ког}} \approx 10^3$  м.

Кроме временной когерентности важно учитывать также пространственную когерентность. Два источника света называют пространственно-когерентными, если их размеры и взаимное распространение позволяют получить интерференцию. Пространственная когерентность определяет когерентные свойства волн в плоскости, нормальной направлению распространения световой волны.

Пространственная когерентность характеризуется радиусом когерентности

$$r_{\text{ког}} \sim \lambda / \phi, \quad (11.4.3)$$

$\lambda$  – длина волны света;  $\phi$  – угловой размер источника света. Радиус когерентности  $r$  – максимальное расстояние, перпендикулярное направлению движения волны, на котором возможно получение интерференции.

При длине волны солнечного света  $\lambda \sim 0,5$  мкм и угловом размере Солнца на Земле  $\phi \approx 10^{-2}$  рад,  $r_{\text{ког}} \approx 0,05$  мм. На таком рассто-

янии непосредственно глаз человека не сможет наблюдать интерференцию, т. к. разрешающая способность его  $\approx 0,1$  мм.

Рассмотрим две когерентные световые волны, имеющие одинаковые начальные фазы:

$$\xi_1 = A_1 \sin(\omega t - k_1 S_1) = A_1 \sin \omega(t - \frac{1}{v_1} S_1) = A_1 \sin \phi_1,$$

$$\xi_2 = A_2 \sin(\omega t - k_2 S_2) = A_2 \sin \omega(t - \frac{1}{v_2} S_2) = A_2 \sin \phi_2$$

$$v_1 = \omega / k_1, \quad v_2 = \omega / k_2, \quad (11.4.4)$$

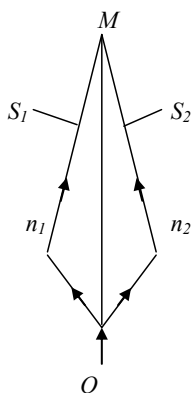


Рис. 11.4.3

которые распространяются от одного источника т.  $O$  в двух разных средах с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  соответственно (см. рис. 11.4.3). До точки  $M$ , где наблюдается интерференция этих волн, первая волна прошла путь  $S_1$ , вторая – путь  $S_2$ .

Разность фаз волн в т.  $M$

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_1 - \phi_2 = \omega \left( \frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \\ &= \frac{\omega}{c} (S_2 n_2 - S_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1), \end{aligned}$$

поскольку  $\omega = 2\pi/T$ ,  $CT = \lambda_0$ ,  $\lambda_0$  – длина вол-

ны в вакууме;  $c$  – скорость света в вакууме,  $L_1 = n_1 S_1$ ,  $L_2 = n_2 S_2$ .

Величины

$$L = nS \text{ и } \Delta L = L_2 - L_1 \quad (11.4.5)$$

называются оптической длиной пути и оптической разностью хода соответственно.

$$\text{Разность фаз двух волн } \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \Delta L.$$

Результат интерференции зависит от оптической разности хода первого и второго лучей:

$$1) \text{ если } \Delta L = \pm m\lambda_0 = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2}, m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Delta\phi = \pm 2m\pi, \quad (11.4.6)$$

условие интерференционного максимума;

$$2) \text{ если } \Delta L = \pm(2m+1) \frac{\lambda_0}{2}, m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Delta\phi = \pm(2m+1)\pi, \quad (11.4.7)$$

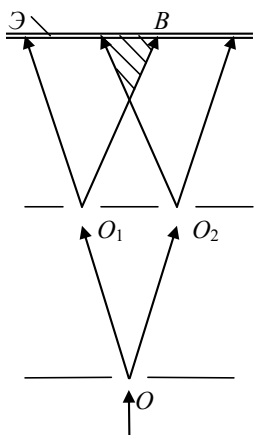


Рис. 11.4.4. Метод Юнга

условие интерференционного минимума.

Методы наблюдения интерференции до создания лазеров основывались на разделении (и наложении) светового луча от одного источника света с помощью различных устройств (щелей, зеркал, призм, пластинок и т. д.) и наложении полученных когерентных лучей.

1. Метод Юнга: источником света является ярко освещенная щель  $O$  (см. рис. 11.4.4), от которой световая волна попадает на две равноудаленные щели  $O_1$  и  $O_2$ , параллельные щели  $O$ . Щели  $O_1$  и  $O_2$  становятся источниками когерентных волн, которые интерферируют в области  $AB$  (заштрихована на рис. 11.4.4), на экране  $\mathcal{E}$  наблюдается интерференционная картина.

2. Зеркала Френеля: система двух плоских зеркал, расположенных под малым углом  $\phi$  друг к другу. Свет от одного источника  $O$  падает на зеркала, в результате возникают два изображения источника в зеркалах  $O_1$  и  $O_2$ , которые являются мнимыми когерентными источниками двух пучков. Эти пучки интерферируют, создавая на экране интерференционную картину.

3. Бипризма Френеля: система двух одинаковых призм с малыми преломляющими углами. Световой пучок, исходящий от источника  $O$ , преломляется в обеих призмах. В результате возникает два пучка, идущие от двух мнимых источников  $O_1$  и  $O_2$ ,

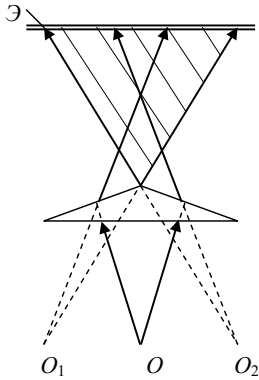


Рис. 11.4.5. Бипризма Френеля

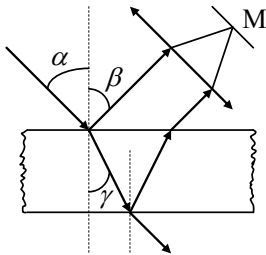


Рис. 11.4.6

которые, накладываясь, создают интерференцию (см. рис. 11.4.5).

4. Интерференция света на тонких прозрачных пленках (бензиновые пленки на воде, масляные пленки на воде, мыльные пузыри и т. п.). Интерferируют два луча: луч, отраженный от поверхности пленки, и луч, прошедший сквозь нее и отраженный от поверхности раздела пленки и воздуха (см. рис. 11.4.6).

Кольца Ньютона: параллельные лучи света падают на плоскую поверхность плоско-выпуклой линзы, лежащей на плоскопараллельной пластинке. Интерferируют лучи, отраженные от верхней и нижней поверхности воздушного зазора между линзой и пластинкой.

Радиусы светлых и темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}, \quad r_k = \sqrt{kR\lambda},$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots),$$

$k$  – номер кольца;  $R$  – радиус кривизны линзы.

Исходя из метода Юнга, можно рассчитать интерференционную картину и определить положение интерференционных максимумов и минимумов на экране. Оптическая разность пути света  $\Delta L = S_2 - S_1$ . Определим величины  $S_2$  и  $S_1$  (см. рис. 11.4.7):

$$S_2^2 = l^2 + (x + \frac{1}{2}d)^2, S_1^2 = l^2 + (x - \frac{1}{2}d)^2, \quad (11.4.8)$$

$d$  – расстояние между щелями  $O_1$  и  $O_2$ ;  $l$  – расстояние от щелей до экрана;  $x$  – положение т.  $M$  интерференционной картины.



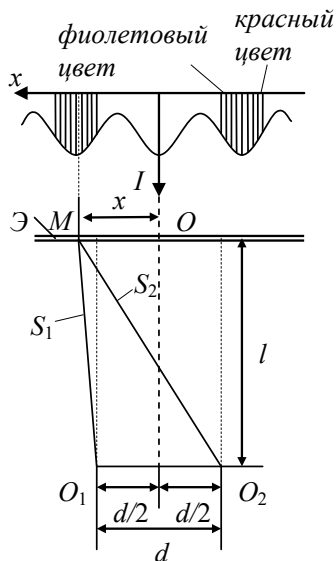


Рис. 11.4.7

Максимумы (минимумы) определяет ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0. \quad (11.4.12)$$

В монохроматическом свете интерференционная картина состоит из чередующихся светлых и темных параллельных полос с интенсивностью света  $I$ .

В белом свете центральный максимум будет также белым, последующие максимумы будут иметь радужную окраску, свет разложится в спектр от фиолетовой полоски до красной. Причина состоит в том, что в белом свете содержится набор (спектр) волн с длиной волны от 0,75 мкм до 0,4 мкм, поэтому, чем больше  $\lambda_0$ , тем далее сдвигается положение соответствующего интерференционного максимума.

Области применения интерференции света:

- 1) интерференционная спектроскопия, в которой для измерения длин волн света используется интерференция;
- 2) интерферометры – точные приборы для измерения размеров тел и др.;

Из (11.4.8) получим

$$S_2^2 - S_1^2 = 2 \cdot d \cdot x,$$

$$\Delta L = 2xd / (S_1 + S_2). \quad (11.4.9)$$

При условии, что  $l \gg d$ , имеем

$$S_1 + S_2 = 2l, \quad \Delta L = x \frac{d}{l}. \quad (11.4.10)$$

Из условий (11.4.6), (11.4.7) получим положение максимумов и минимумов:

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x_{\min} = \pm (2m + 1) \frac{l}{d} \frac{1}{2} \lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$(11.4.11)$$

Расстояние между соседними

3) просветление оптики – применяется для улучшения качества оптических приборов.

## 11.5. Дифракция света

**Метод зон Френеля.** Дифракция света есть явление огибания световыми волнами препятствий и отклонение распространения света от законов геометрической оптики.

Дифракция объясняется принципом Гюйгенса. Этот принцип определяет направление распространения волнового фронта, но не объясняет, почему свет дает резкую тень, не рассматривает вопрос об интенсивности световых волн, распространяющихся в различных направлениях.

Френель дополнил принцип Гюйгенса положением об интерференции вторичных волн, которое устранило названные недостатки. Принцип Гюйгенса – Френеля: световая волна, излучаемая источником  $O$ , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, излучаемых вторичными (фиктивными) источниками фронта волны (см. рис. 11.5.1).

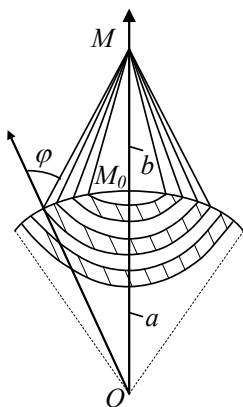


Рис. 11.5.1. Зоны Френеля

Вторичными источниками могут быть малые элементы замкнутой поверхности, охватывающей источник  $O$ , т. е. одна из волновых поверхностей. Поэтому все вторичные источники излучают когерентные волны. Свет от источника  $O$  является результатом наложения когерентных волн, распространяющихся лишь в прямом направлении.

С помощью метода зон Френеля стало возможным объяснение прямолинейного распространения света и самого явления дифракции. Согласно этому методу, волновая сферическая поверхность разбивается на кольцевые зоны таким образом, чтобы расстояния от краев зоны до некоторой точки  $M$  отличались на величину  $\lambda/2$ . Тогда колебания от соседних зон доходят до  $M$  в противофазе и взаимно ослабляют друг друга. Вследствие этого амплитуда результирующей волны может быть представлена в виде

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - \dots = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (11.5.1)$$

здесь  $A_1, A_2, A_3, \dots$  – амплитуды колебаний каждой отдельной зоны;  $n$  – количество зон.

Амплитуды колебаний  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$  – вследствие уменьшения интенсивности волн, поскольку увеличивается расстояние до т.  $M$  и угол  $\phi$ .

Количество зон  $n = \frac{2\pi a^2}{\pi ab \lambda} (a + b)$ . Для  $a = b = 0,1$  м,

$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м,  $n = 8 \cdot 10^5$ .

Вследствие малости длины волны  $\lambda$  количество зон  $n$ , на которые можно разделить волновую поверхность (полусферу), очень велико, а сами зоны очень малы, поэтому можно принять, что амплитуда колебаний  $i$ -й зоны есть среднее арифметическое амплитуд соседних зон:

$$A_i = \frac{1}{2}(A_{i-1} + A_{i+1}). \quad (11.5.2)$$

Поэтому амплитуда  $A$  может быть представлена в виде

$$A = \frac{1}{2}A_1 + \left(\frac{1}{2}A_1 - A_2 + \frac{1}{2}A_3\right) + \left(\frac{1}{2}A_3 - A_4 + \frac{1}{2}A_5\right) + \dots = \frac{1}{2}A_1 \pm \frac{1}{2}A_n \approx \frac{1}{2}A_1, \quad (11.5.3)$$

(+) – для нечетных  $n$ , (–) – для четных  $n$ , т. к. выражение в скобках, согласно (11.5.2), равны нулю, а амплитуда  $A_n$  последней зоны пренебрежимо мала.

Радиус зоны Френеля  $r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}$ :  $a$  – расстояние

от источника до фронта волн;  $b$  – расстояние от фронта до точки наблюдения  $M$ ;  $m$  – номер зон;  $\lambda$  – длина волны

Следовательно, амплитуда результирующих световых колебаний в т.  $M$  и соответствующая интенсивность света определяется действием половины центральной зоны Френеля. Действие остальных зон в результате интерференции взаимно компенсируется. Поэтому свет от центральной зоны ( $i = 1$ ) распространяет-

ся в виде тонкого цилиндрического луча, что и объясняет законы прямолинейного распространения света.

Метод Френеля подтверждается с помощью зонной пластинки – стеклянной пластинки, на которой нанесены концентрические прозрачные и непрозрачные кольца, закрывающие четные (или нечетные) зоны Френеля. В результате интенсивность света в т.  $M$  увеличивается, и зонная пластинка действует подобно собирающей линзе.

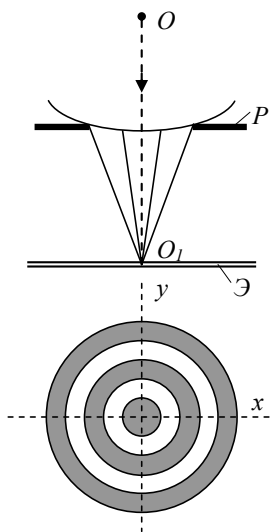


Рис. 11.5.2. Дифракция на отверстии

Существует дифракция в сходящихся лучах (дифракция Френеля) и дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера).

**Дифракция Френеля.** Дифракция Френеля на круглом отверстии наблюдается при освещении небольшого отверстия в непрозрачной пластине  $P$ . При этом дифракционная картина находится на конечном расстоянии от препятствия и представляет собой изображение препятствия (отверстия) на экране  $\mathcal{E}$  в виде чередующихся темных и светлых колец с центром в т.  $O_1$  (см. рис. 11.5.2). Если на отверстии (на фронте волны в нем) укладывается четное число зон Френеля, то амплитуда колебаний в т.  $O_1$  будет минимальной:

$$A = A_{\min} = \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_n, \quad (11.5.3)$$

интенсивность света резко падает, и в центре наблюдается темное пятно, а далее, в точках с аналогичными условиями – темные кольца.

Если на отверстии укладывается нечетное число зон Френеля, то амплитуда колебаний в т.  $O$  будет максимальной:

$$A = A_{\max} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_n \quad (11.5.4)$$

интенсивность света в этой точке увеличивается и наблюдается светлое пятно.

Если отверстие открывает всего две зоны, то в центре – темное пятно, если одну зону, то амплитуда колебаний в т.  $O_1$  будет в 2 раза больше, чем в отсутствие преграды  $P$ , интенсивность света  $I \sim A^2$ , т. е. возрастет в 4 раза.

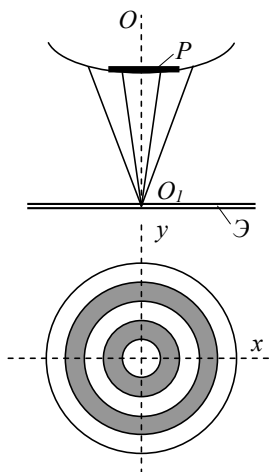


Рис. 11.5.3. Дифракция на диске

Если отверстие освещается белым светом, то кольца окрашены, свет разложится в спектр.

Дифракция Френеля на диске происходит подобно предыдущему случаю. Если диск  $P$  закрывает  $m$  первых зон Френеля, амплитуда в т.  $O_1$  определяется половиной амплитуды первой открытой зоны:

$$A = \frac{1}{2} A_1,$$

т.к. действием последней открытой зоны можно пренебречь. Следовательно, в т.  $O_1$  всегда будет светлое пятно, окруженное темными и светлыми кольцами (см. рис. 11.5.3).

Если размеры диска велики, за ним наблюдается тень. Вблизи границ ее существует очень слабая дифракционная картина, которой можно пренебречь.

**Дифракция Фраунгофера на узкой длинной щели.** Дифракция Фраунгофера наблюдается в параллельных лучах. При этом точечный источник  $O$  можно поместить в фокусе собирающей линзы, и направить параллельный пучок света на узкую длинную щель шириной  $AB$ , за которой размещается вторая линза, в фокальной плоскости которой на экране  $\mathcal{E}$  наблюдается дифракция.

Плоская световая волна падает нормально на щель шириной  $AB = a$ . Оптическая разность хода между лучами  $AA_1$  и  $BB_1$  в некотором направлении под углом  $\phi$

$$\Delta L = BC = a \sin \phi, \quad (11.5.5)$$

т. к.  $AC$  – плоский фронт (см. рис. 11.5.4).

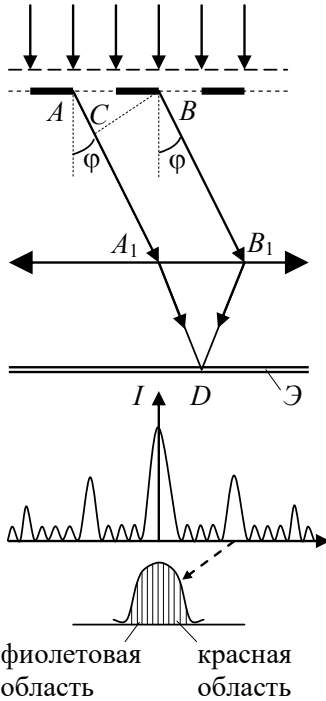


Рис. 11.5.4

Открытая часть волновой поверхности АВ разбивается на зоны Френеля в виде полос, параллельных щели, шириной  $\lambda/2$ . Количество зон, укладываемых на щели

$$n = \frac{\Delta L}{\lambda/2}. \quad (11.5.6)$$

Все точки в плоскости щели колеблются в одинаковой фазе, поскольку фронт волны – плоский, амплитуды вторичных волн равны, т. к. зоны имеют одинаковые площади и углы  $\phi$ .

От числа зон  $n$  зависит результат наложения вторичных волн. Интерференция света от двух соседних зон приводит к тому, что амплитуда результирующей волны обращается в ноль. Поэтому, если число зон четное, то на разности  $\Delta L$  укладывается четное число длин полуволн, и их действие в т. D взаимно компенсируется. В т. D

наблюдается дифракционный минимум, условие которого

$$a \sin \phi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.5.7)$$

Если число зон – нечетное, одна некомпенсированная зона дает в т. D дифракционный максимум, условие которого

$$a \sin \phi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.5.8)$$

В направлении  $\phi = 0$  щель действует как одна зона, свет имеет максимальную интенсивность, на экране образуется центральный дифракционный максимум.

Интенсивность света на экране распределится от центрального максимума ( $\phi = 0$ ) к последующим ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) в соотношении: 1:0,047:0,017:0,0083:...

В белом свете боковые максимумы интенсивности света разлагаются в разноцветный спектр.

**Дифракция на дифракционной решетке.** Одномерная плоская дифракционная решетка – система параллельных щелей равной ширины ( $a$ ), разделенных равными непрозрачными полосами (шириной  $b$ ). Величина  $d = a + b$  называется постоянной решетки или периодом (см. рис. 11.5.5).

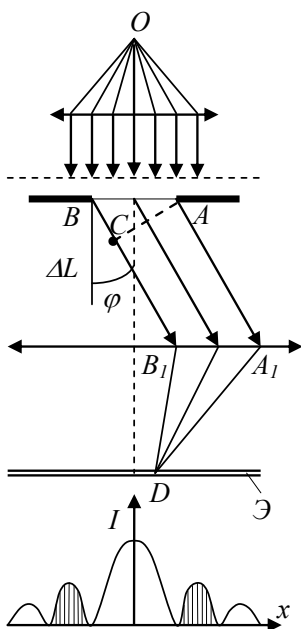


Рис. 11.5.5

Для различных дифракционных решеток постоянная  $d$  изменяется от 4 мм до  $\approx 2 \cdot 10^{-4}$ , при этом число штрихов  $N$  составляет от 0,25 до  $6000 \frac{1}{\text{мм}}$ .

Дифракционные картины от двух щелей будут одинаковыми, поскольку распределение максимумов и минимумов света зависит лишь от угла  $\phi$  (для одной щели).

В результате совместного действия всех щелей происходит многолучевая интерференция дифрагированных лучей света, идущих от всех щелей. Для двух соседних щелей разность хода лучей

$$\Delta L = AC = d \sin \phi = (a + b) \sin \phi, \quad (11.5.9)$$

будет одинакова в данном направлении  $\phi$  для дифракционной решетки.

Точки, в которых интенсивность света была минимальной для одной щели, останутся неосвещенными и при действии всех щелей решетки. Поэтому положение дифракционных минимумов для решетки определяется аналогично (11.5.7):

$$a \sin \phi = \pm m \lambda = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (11.5.10)$$

что является условием главных минимумов.

Вследствие взаимной интерференции световых лучей от двух соседних щелей в некоторых точках они будут гасить друг друга,

возникнут дополнительные минимумы интенсивности в точках, у которых разность хода лучей составляет  $\lambda/2$ ,  $3/2\lambda$  и т. д. Условие дополнительных (вторичных) минимумов

$$d \sin \phi = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.5.11)$$

между ними будут расположенные слабые вторичные максимумы.

Напротив, в некоторых точках лучи от соседних щелей будут усиливать действие друг друга, возникнут максимумы интенсивности света. Условие главных максимумов

$$d \sin \phi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (11.5.12)$$

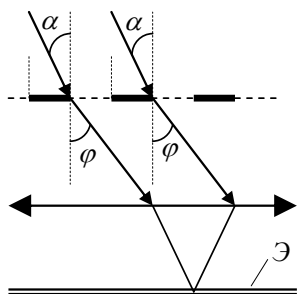


Рис. 11.5.6

Если решетка освещена монохроматическим светом, полосы максимальной освещенности имеют одинаковый цвет. Если дифракция наблюдается в белом свете, центральный максимум ( $m = 0$ ,  $\phi = 0$ ) будет также белым, остальные максимумы разложатся в разноцветный спектр по длинам волн, от фиолетовой полоски к центру до красной у периферии максимума.

Если свет падает на решетку под углом  $\alpha$  (см. рис. 11.5.6), то условие главных максимумов примет вид

$$d(\sin \phi - \sin \alpha) = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (11.5.13)$$

Дифракция применяется для исследования спектрального состава света, которое осуществляется с помощью дифракционного спектрографа. Основным его элементом является дифракционная решетка.

## 11.6. Дисперсия света

Дисперсией света называется явление зависимости фазовой скорости световой волны  $v$  от ее частоты  $\nu$  в виде  $v = v(\nu)$  или  $v = v(\omega)$ .



Скорость света в среде зависит от показателя преломления  $n$ , поэтому дисперсия света обычно представляется в виде зависимости показателя преломления среды от частоты или длины волны:

$$n = n(\lambda) \text{ или } n = n(\nu). \quad (11.6.1)$$

Дисперсия света проявляется при прохождении луча белого света сквозь прозрачную призму, выполненную из какой-либо однородной среды. Вследствие дисперсии световые лучи с различными длинами волн преломляются призмой под разными углами, свет разлагается в радужную полосу, называемую призматическим спектром (см. рис. 11.6.1).

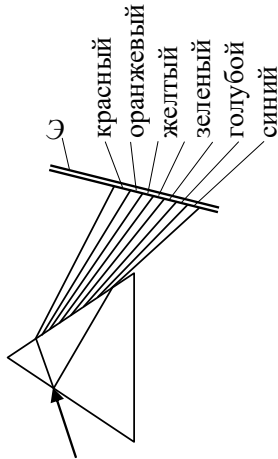


Рис. 11.6.1

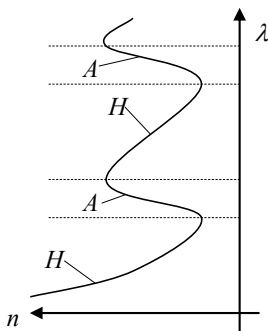


Рис. 11.6.2:

H – область нормальной дисперсии,  
A – область аномальной дисперсии

Призматический спектр имеет иное, по сравнению с дифракционным, расположение цветовых полос: от красного цвета к фиолетовому. Опыт показывает, что для всех прозрачных сред показатель преломления  $n$  по мере увеличения частоты  $\nu$  или, иначе, уменьшения длины волны  $\lambda$ , возрастает. Поэтому красные лучи отклоняются призмой меньше, чем фиолетовые. Такая дисперсия называется нормальной. Эта зависимость  $n(\lambda)$  изменяется на противоположную в области длин волн, соответствующих спектральным линиям или полосам поглощения света в данном веществе, среде. В этом случае показатель преломления возрастает при увеличении длины волны в этой узкой области. Такая дисперсия называется аномальной (см. рис. 11.6.2).

Быстрота изменения показателя преломления  $n$  в зависимости от  $\lambda$  или от  $\nu$  характеризуется дисперсией вещества  $D$ :

$$D = \frac{dn}{d\lambda} \text{ или } D^* = \frac{dn}{dv}. \quad (11.6.2)$$

В области нормальной дисперсии величина  $D^*$  возрастает,  $D$  – убывает, в области аномальной дисперсии наоборот,  $D^*$  – убывает,  $D$  – возрастает.

Нормальная дисперсия света применяется в призмных спектрографах, используемых для спектрального анализа излучения.

Призматический спектр отличается от дифракционного:

– в дифракционном спектре свет разлагается непосредственно по длинам волн, а в призматическом спектре – по значениям показателя преломления  $n$ , поэтому для определения длины волны  $\lambda$  необходимо иметь зависимость дисперсии среды в виде  $n = n(\lambda)$  или  $n = n(\nu)$ ;

– цвета света в дифракционном и призматическом спектрах располагаются в противоположном порядке. В дифракционной решетке угол отклонения луча  $\phi$  пропорционален длине волны  $\lambda$ , поэтому фиолетовые лучи отклоняются меньше, чем красные в призме свет разлагается в спектр по числу  $n$ , поэтому в области нормальной дисперсии фиолетовые лучи отклоняются в призме на больший угол, чем красные.

Применение призмных спектрографов, несмотря на некоторые недостатки, например, необходимость определения зависимости  $n(\lambda)$ , обусловлено тем, что качественная призма изготавливается проще, чем дифракционная решетка.

## 11.7. Поглощение света

Поглощение света – явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в среде, происходящее вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии.

Энергия световой волны преобразовывается во внутреннюю энергию вещества. Это может вызвать вторичное излучение с другим спектральным составом и направлением распространения (фотолюминесценция), а также вызвать нагревание вещества, возбуждение и ионизацию атомов, фотохимические реакции и др.

При поглощении света интенсивность  $I$  плоской волны монохроматического света уменьшается по экспоненциальному закону (закон Бугера – Ламберта)

$$I = I_0 \exp(-\alpha x), \quad (11.7.1)$$

$I_0$ ,  $I$  – интенсивности света на входе и на выходе из слоя среды толщиной  $x$ ,  $\alpha$  – показатель поглощения среды.

Показатель поглощения  $\alpha$  зависит от химической природы и состояния среды и от длины волны света  $\lambda$ .

Показатель поглощения среды  $\alpha$  для одноатомных газов и паров металлов очень мал,  $\alpha \approx 0$ , для диэлектриков  $\alpha \approx 10^{-5} \dots 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ , для металлов  $\alpha \approx 10^3 \dots 10^5 \text{ см}^{-1}$ .

В соответствии с законом Бугера (11.7.1) уравнение плоской монохроматической световой волны имеет вид

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x\right) \cos(\omega t - kx). \quad (11.7.2)$$

Одноатомные газы и пары металлов имеют узкие области спектра, где наблюдается резкий максимум показателя  $\alpha$ , т. е. они имеют линейчатый спектр поглощения. Линии поглощения соответствуют собственным частотам колебаний электронов в атомах. Молекулы имеют спектр поглощения в виде узких полос.

Линии поглощения наблюдаются в узкой области спектра при ширине линии  $\Delta\lambda = 10^{-12} - 10^{-11} \text{ м}$ , полосы поглощения при ширине полосы  $\Delta\lambda = 10^{-10} - 10^{-7} \text{ м}$ .

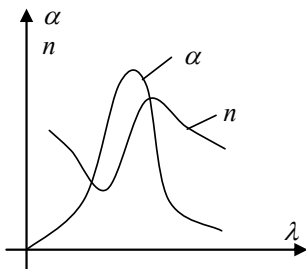


Рис. 11.7.2

Диэлектрики имеют широкие полосы поглощения (сплошной спектр поглощения), т. е. в определенных интервалах длин волн  $\alpha$  резко возрастает.

Металлы имеют большие значения показателя поглощения и непрозрачны для света, они также имеют сплошной спектр поглощения.

Характер зависимости показателя поглощения  $\alpha$  и показателя преломления  $n$  от длины волны  $\lambda$  для металлов и диэлектриков различен.

ломления среды  $n$  от длины волны  $\lambda$  в области поглощения дан на рис. 11.7.2.

Спектры поглощения позволяют осуществлять спектральный анализ вещества, смесей газов и т. д.

Различные тела имеют разные области поглощения света согласно своей зависимости  $\alpha(\lambda)$ , что объясняет различие их цветов и окрасок.

В оптике разноцветные стекла применяются для изготовления светофильтров: красное или желтое стекло пропускает свет соответствующих длин волн, другие волны, например, синего цвета или зеленого сквозь них не проходят.

### 11.8. Эффект Доплера в оптике

Эффект Доплера наблюдается при движении источника и приемника электромагнитных волн. Частота волн, воспринимаемых приемником, зависит от относительной скорости источника и приемника излучения (наблюдателя).

На основе специальной теории относительности эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме описывается формулой

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta \cos \phi}, \quad (11.8.1)$$

$\nu$  – частота волн, воспринимаемых приемником;  $\nu_0$  – частота волн, излучаемых источником;  $\beta = v/c$ ;  $v$  – скорость источника света относительно приемника;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\phi$  – угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с приемником волн.

В частном случае, при  $\phi = 0$ , формула (11.8.1) примет вид

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad (11.8.2)$$

что определяет продольный эффект Доплера, наблюдаемый при движении приемника по прямой, соединяющей приемник и источник излучения.

При малой относительной скорости  $v$ , ( $v \ll c$ ) формула (11.8.2) упрощается

$$\nu = \nu_0 (1 - \beta) = \nu_0 \frac{c - v}{c}. \quad (11.8.3)$$

Если  $v > 0$  (источник и приемник удаляются друг от друга),  $\nu < \nu_0$  – красное смещение.

Если  $v < 0$  (источник и приемник сближаются друг с другом),  $\nu > \nu_0$  – фиолетовое смещение.

Если в формуле (11.8.1)  $\phi = \pi/2$ , она примет вид

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (11.8.4)$$

что определяет поперечный эффект Доплера, который наблюдается при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником излучения. При малых скоростях, при  $v \ll c$ ,  $\nu = \nu_0$ . Поэтому поперечный эффект Доплера наблюдается лишь при большой скорости  $v$  и является релятивистским эффектом, что создает большие затруднения при его наблюдении.

## 11.9. Поляризация света

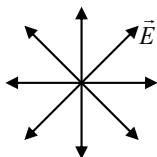


Рис. 11.9.1

Естественный свет является результатом наложения множества электромагнитных волн, излучаемых различными атомами. Поэтому световой вектор  $\vec{E}$  в естественном свете имеет различные направления. В целом свет характеризуется средней интенсивностью  $I$  с равномерным распределением вектора  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны,  $I \sim E^2$  (см. рис. 11.9.1).

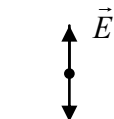


Рис. 11.9.2

Если вектор  $\vec{E}$  описывает окружность, свет называется поляризованным по кругу.

Свет с упорядоченным распределением направлений колебаний вектора  $\vec{E}$  каким-либо образом называется поляризованным (см. рис. 11.9.2, 11.9.3).

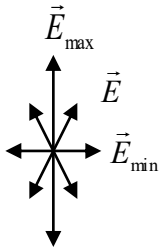


Рис. 11.9.3

*Плоскополяризованный свет* – свет, в котором вектор  $\vec{E}$  колеблется вдоль одного направления, и представляет собой плоскую волну (см. рис. 11.9.2).

*Плоскость поляризации света* – плоскость, содержащая вектор  $\vec{E}$  и вектор фазовой скорости  $\vec{v}$  волны плоскополяризованного света.

*Эллиптически поляризованный свет* – свет, в котором вектор  $\vec{E}$  описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{v}$ .

Свет характеризуется степенью поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (11.9.1)$$

$I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  – максимальная и минимальная интенсивности поляризованного света, соответствующие значениям  $\vec{E}_{\max}$  и  $\vec{E}_{\min}$  эллиптически поляризованного света.

Естественный свет с равномерным распределением вектора  $\vec{E}$  имеет одинаковые интенсивности по всем направлениям в плоскости, перпендикулярной скорости  $\vec{v}$ , поэтому  $I_{\max} = I_{\min}$ , и степень поляризации  $P = 0$ . Для плоскополяризованного света  $I_{\min} = 0$ ,  $P = 1$ .

Поляризованный свет может быть получен с помощью поляризаторов, сред, пропускающих колебания светового вектора  $\vec{E}$  в определенном направлении.

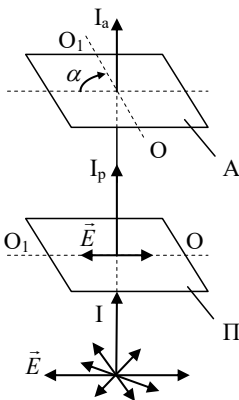


Рис. 11.9.4

Основные способы поляризации света:

Применение естественных кристаллов (турмалин и др.)

Отражение света на границе двух диэлектриков.

Использование явления двойного лучепреломления в кристаллах.

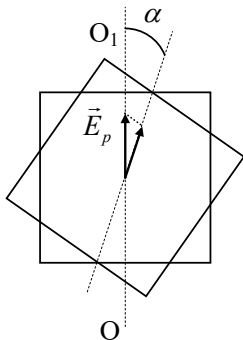
Создание искусственной анизотропии сред.

Рассмотрим эти способы подробнее.

1. *Поляризация света кристаллом турмалина.* Пластинка турмалина, вырезанная параллельно оптической оси  $OO_1$  кристалла, является поляризатором ( $P$ ). Вторая такая же пластина, установленная параллельно первой, является анализатором ( $A$ ), который позволяет определить характер и степень поляризации света, проходящего сквозь поляризатор (см. рис. 11.9.4).

При повороте анализатора на угол  $\alpha$  (см. рис. 11.9.5) между оптическими осями пластинок интенсивность света изменяется в соответствии с законом Малюса

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha \quad (11.9.2)$$



$$E_a = E_p \cos \alpha$$

Рис. 11.9.5

$I_a$  – интенсивность света, прошедшего анализатор,  $I_a \sim E_a^2$ ;

$I_p$  – интенсивность света, прошедшего поляризатор,  $I_p \sim E_p^2$ .

Интенсивность естественного света  $I$ , прошедшего поляризатор, снижается, т. е.

$$I_p = \frac{1}{2} I, \text{ поэтому свет, прошедший анали-}$$

затор, имеет интенсивность

$$I_a = \frac{1}{2} I \cos^2 \alpha. \quad (11.9.3)$$

2. *Поляризация света на границе двух диэлектриков.* Свет, падающий на границу двух диэлектриков, частично поляризуется: в отраженном луче преобладают колебания вектора  $\vec{E}$ , перпендикулярные плоскости падения луча, в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения (см. рис. 11.9.6).

Степень поляризации света зависит от угла  $\alpha$  падения луча и показателя преломления среды  $n_{21}$ . При некотором угле  $\alpha = \alpha_b$  отраженный луч полностью поляри-

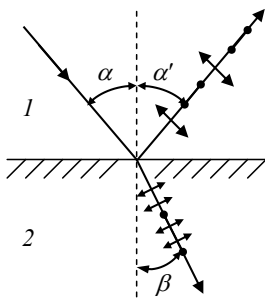


Рис. 11.9.6

зуется (в плоскости, перпендикулярной плоскости падения), этот угол определяется законом Брюстера

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (11.9.4)$$

где  $\alpha_B$  – угол Брюстера;  $n_{21}$  – относительный показатель преломления.

Преломленный луч в этом случае поляризуется максимально, но не полностью.

При  $\alpha = \alpha_B$  отраженный и преломленный лучи становятся взаимноперпендикулярными, поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B}, \quad n_{21} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta}, \quad (11.9.5)$$

т. е.  $\cos \alpha_B = \sin \beta$ , поэтому  $\alpha_B + \beta = \pi/2$ . Но  $\alpha_B = \alpha'$ , следовательно

$$\alpha' + \beta = \pi/2, \quad (11.9.6)$$

т. е. угол между этими лучами – прямой.

Степень поляризации может быть значительно увеличена при пропускании света через стопу стеклянных пластинок, так, чтобы каждый раз свет падал на границу раздела под углом  $\alpha_B$ . Свет, прошедший стопу из 8–10 пластинок практически полностью поляризуется.

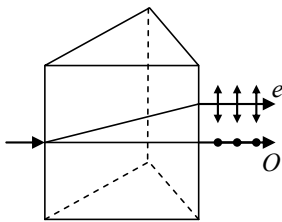


Рис. 11.9.7

3. Поляризация при двойном лучепреломлении в кристаллах. *Двойное лучепреломление* – свойство прозрачных кристаллов раздваивать падающий луч света. Оно наблюдается во всех кристаллах, кроме кристаллов кубического строения, являющихся оптически изотропными.

При падении луча света на кристалл, например, исландского шпата, из него выходят два параллельных луча, которые параллельны падающему лучу. Раздвоение луча происходит и в том случае, когда он падает на кристалл нормально, при этом первый вышедший из кристалла луч является



продолжением падающего и называется обыкновенным ( $O$ ), а второй отклоняется и называется необыкновенным ( $e$ ) лучом (см. рис. 11.9.7).

Вышедшие из кристалла лучи являются плоскополяризованным во взаимноперпендикулярных плоскостях. Плоскость, проведенная через направление падающего луча и оптическую ось кристалла, называется главной плоскостью.

*Оптическая ось анизотропного кристалла – направление, в котором луч света распространяется, не раздваиваясь.*

Любая прямая, параллельная этому направлению, является оптической осью кристалла. Одноосные кристаллы имеют одну оптическую ось.

Двуосные кристаллы имеют две оптические оси.

Колебания светового вектора  $\vec{E}$  в обыкновенном луче происходят перпендикулярно главной плоскости, в необыкновенном луче – в главной плоскости.

Обыкновенный и необыкновенный лучи имеют разные показатели преломления. Обыкновенный луч распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью и имеет постоянный показатель преломления  $n_o$ , при этом вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен оптической оси кристалла.

В необыкновенном луче угол между вектором  $\vec{E}$  и оптической осью зависит от направления луча и не является в общем случае прямым. Поэтому этот луч распространяется в различных направлениях с разными скоростями и имеет показатель преломления  $n_e$ , зависящий от направления луча.

Следовательно, двойное лучепреломление обусловлено различиями в скоростях света обыкновенного и необыкновенного лучей в кристаллах.

*Дихроизм* – свойство кристалла различно поглощать свет в зависимости от направления вектора  $\vec{E}$  в луче света.

*Турмалин* – дихроичный кристалл, полностью поглощает  $O$ -луч при толщине пластинки 1 мм, пропуская  $e$ -луч.

*Поляроид* – целлулоидная пленка с кристаллами герпатита, являющегося сильным дихроичным веществом

Для получения поляризованного света применяют следующие приспособления:

1) поляризационные призмы, дающие плоскополяризованный луч (призма Николя);

2) двоякопреломляющие призмы, дающие два луча, поляризованные во взаимноперпендикулярных плоскостях;

3) поляроиды.

4. Искусственная анизотропия среды.

Оптическая анизотропия среды может быть создана в естественно изотропных веществах в следующих случаях:

1) механическая деформация тела в виде одностороннего растяжения или сжатия стекла, изотропных кристаллов кубической формы и др.;

2) воздействие электрического поля на прозрачные жидкости, газы, аморфные тела (эффект Керра);

3) воздействие магнитного поля на прозрачные жидкости, коллоиды, стекла (эффект Коттона – Мутона).

Эффект Керра – возникновение оптической анизотропии среды под действием электрического поля. Происходит в результате различной поляризуемости молекул в разных направлениях. Аналогично, объясняется эффект Коттона – Мутона, при котором намагниченность зависит от направления в среде.

Во всех этих случаях вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с направлением деформации, электрического или магнитного поля.

Мерой оптической анизотропии является разность показателей преломления  $\Delta n$  обыкновенного  $n_0$  и необыкновенного  $n_e$  лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси. Величина  $\Delta n$  определяется:

1) для механической деформации

$$\Delta n = n_0 - n_e = k_1 \sigma, \quad (11.9.7)$$

2) для электрического поля

$$\Delta n = n_0 - n_e = k_2 E^2, \quad (11.9.8)$$

3) для магнитного поля

$$\Delta n = n_0 - n_e = k_3 H^2, \quad (11.9.9)$$

здесь  $k_1, k_2, k_3$  – постоянные, зависящие от свойств вещества.

Оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей на пути  $S$

$$\Delta L = \Delta n S = (n_0 - n_e) S, \quad (11.9.10)$$

и соответствующая разность фаз этих лучей

$$\Delta\phi = k\Delta L = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda}. \quad (11.9.11)$$

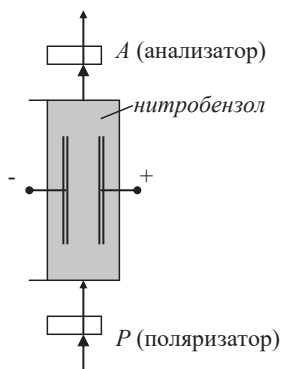


Рис. 11.9.8. Ячейка Керра

Схема ячейки Керра, используемой как световой затвор, дана на рис. 11.9.8. В отсутствие электрического поля свет сквозь кювету с нитробензолом не проходит. При включении электрического поля возникает анизотропия среды, жидкость становится двоякопреломляющей. Интенсивность света, прошедшего анализатор, зависит от разности потенциалов на пластинах.

Время перехода жидкости в анизотропное состояние при включении поля  $\Delta t \approx 10^{-10}$  с. Поэтому ячейка Керра является идеальным световым затвором и применяется в скоростных процессах: киносъёмка, фотосъёмка, в оптической связи, при изучении оптических явлений и др.

## 11.10. Фотометрические величины и единицы измерения

Фотометрия изучает вопросы измерения интенсивности света и его источников.

Фотометрические величины подразделяются на энергетические и световые.

1. Энергетические величины:

а) поток излучения  $\Phi_e$  есть величина, равная отношению энергии  $W$  излучения ко времени  $t$  излучения:

$$\Phi_e = \frac{W}{t}; \quad (11.10.1)$$

б) энергетическая светимость (излучаемость)  $R_e$  есть отношение потока излучения  $\Phi_e$  к площади сечения  $S$ , через которое проходит этот поток:

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}; \quad (11.10.2)$$

в) энергетическая сила света  $I_e$  есть отношение потока излучения  $\Phi_e$  точечного источника к телесному углу  $\omega$ , в котором распространяется этот поток:

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}; \quad (11.10.3)$$

г) энергетическая яркость  $B_e$  есть отношение энергетической силы света  $\Delta I_e$  элемента излучающей поверхности к площади  $\Delta S$  проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения:

$$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}; \quad (11.10.4)$$

д) энергетическая освещенность  $E_e$  есть отношение потока излучения  $\Phi_e$  к площади  $S$  освещаемой поверхности:

$$E_e = \frac{\Phi_e}{S}. \quad (11.10.5)$$

## 2. Световые величины:

Они характеризуют физическое действие видимого света, исходя из средней чувствительности глаза или некоторого приемника света.

а) световой поток  $\Phi$  есть мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению, т. е. по его действию на селективный приемник света с заданной спектральной чувствительностью:

$$\Phi = \frac{W}{t}; \quad (11.10.6)$$

б) светимость  $R$  есть отношение светового потока  $\Phi$  к площади  $S$ , через которую он проходит,  $[\Phi] = \text{Люмен}(\text{лм})$  1лм – све-

товой поток точечного источника с силой света 1 кд внутри телесного угла в 1 Ср,  $1\text{лм} = 1\text{кд} \cdot \text{Ср}$  :

$$R = \frac{\Phi}{S}; \quad (11.10.7)$$

$$[R] = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

в) сила света  $I$  есть отношение светового потока  $\Phi$  к телесному углу  $\omega$ , в котором он распространяется:

$$I = \frac{\Phi}{\omega}, \quad (11.10.8)$$

$$[I] = 1\text{кд}, \quad 1\text{кд} = \frac{1}{683} \frac{\text{Вт}}{\text{Ср}},$$

1 кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника монохроматического излучения с частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении равна  $1/683$  Вт/Ср.

Для точечного источника света, излучающего во всех направлениях, сила света

$$I = \frac{\Phi}{4\pi};$$

г) яркость  $B_\phi$  светящейся поверхности в некотором направлении  $\phi$  есть отношение силы света  $I$  в этом направлении к площади  $S$  проекции этой поверхности, нормальной этому направлению:

$$B_\phi = \frac{I}{S \cos \phi}, \quad (11.10.9)$$

$$[B_\phi] = 1\text{кд} / \text{м}^2;$$

д) освещенность  $E$  есть отношение светового потока  $\Phi$  к площади  $S$  освещенной поверхности:

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (11.10.10)$$

$$[E] = 1\text{люкс(лк)}, \quad 1\text{лк} = 1\text{лм} / \text{м}^2.$$

## Задания для самостоятельной работы и задачи к главам 10, 11

### Зачётные требования

1. Колебания и волны: знание основных видов колебаний, их дифференциальных уравнений и решений, резонанс; знать уравнение и характеристики волны, интенсивность и энергию волн; уметь применять законы, уравнения различных типов колебаний и волн в конкретных условиях задач и тестов.

2. Сложение колебаний одинакового направления и частоты, векторная диаграмма, сложение взаимно перпендикулярных колебаний, знать правил сложения, уметь применять их в конкретных условиях задач, тестов.

3. Электромагнитные волны, свет: знать уравнение и параметры электромагнитных волн, интенсивность волн, энергию волны, геометрическую оптику, законы геометрической оптики; уметь применять их в конкретных условиях задач и тестов.

4. Волновая оптика: знать принципы Гюйгенса, Френеля, явления интерференции света, дифракции света, законы, описывающие их, явления дисперсии, поляризации волн, затухания волн, законы, описывающие эти явления; уметь применять их в конкретных условиях задач и тестов.

### Зачётные задания

Выполнить задания, данные в ниже, в соответствии со своим вариантом.

#### Задача 1.

Тело массой  $m$  совершает колебания под действием упругой силы  $F$  пружины жесткостью  $C$ . Амплитуда колебаний  $A$ , начальная фаза  $\alpha_0$ , период  $T$ , частота  $\nu$ , максимальная потенциальная энергия  $E_m^п$ , полная механическая энергия  $E_{полн}$ , максимальная сила  $F_{max}$ . Движение тела начинается из состояния покоя при сообщении ему начальной кинетической энергии  $E_0^k$ .

Записать уравнение движения тела и найти параметры, обозначенные знаком «?». Значения параметров приведены в табл. 11.11.1.

Таблица 11.11.1

№ варианта	$m, \text{ кг}$	$C, \text{ Н/см}$	$A, \text{ м}$	$\alpha_0, \text{ рад}$	$\omega, \text{ р/с}$	$T, \text{ с}$	$\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\text{с}}$	$E_0^k, \text{ Дж}$	$E_m^H, \text{ Дж}$	$E_{\text{полн}}, \text{ Дж}$	$F_{\text{max}}, \text{ Н}$
1	1	2	?	?	?	?	?	0,4	?	?	?
2	2	3	0,05	?	?	?	?	?	?	?	?
3	1,5	?	?	?	18	?	?	?	?	1,2	20
4	2,5	?	0,08	?	?	?	?	12	?	?	?
5	3	?	?	?	?	0,3	?	?	?	?	50
6	4	8	?	?	?	?	?	?	?	2	?
7	3,5	4	?	?	?	?	?	?	?	?	80
8	4,5	?	0,03	?	?	?	2	?	?	?	?
9	1,2	?	?	?	18	?	?	?	?	8	?
10	1,8	3,8	?	?	?	?	?	2,2	?	?	?

## Задача 2.

Резистор сопротивлением  $R$ , катушка индуктивностью  $L$ , конденсатор емкостью  $C$  включены последовательно в цепь переменного тока с действующим напряжением  $U$ , и частотой  $\nu$ . Падения напряжения на элементах цепи  $U_R, U_L, U_C$ . Мощность цепи  $P$ , сдвиг фаз  $\varphi$ , действующая сила тока  $I$ , полное сопротивление цепи  $z$ .

Найти параметры, обозначенные знаком «?» в табл. 11.11.2.

Таблица 11.11.2

№ варианта	$R, \text{ Ом}$	$L, \text{ мГн}$	$C, \text{ мкФ}$	$U, \text{ В}$	$\nu, \text{ Гц}$	$I, \text{ А}$	$z, \text{ Ом}$	$P, \text{ Вт}$	$\cos\varphi$	$U_R$	$U_L$	$U_C$
1	100	0,8	40	220	50	?	?	?	?	?	?	?
2	50	?	35	220	50	4,4	?	?	?	?	?	?
3	?	0,6	20	230	50	4	?	?	?	?	?	?

№ варианта	$R, \text{ Ом}$	$L, \text{ мГн}$	$C, \text{ мкФ}$	$U_0, \text{ В}$	$v, \text{ Гц}$	$I_0, \text{ А}$	$z, \text{ Ом}$	$P, \text{ Вт}$	$\cos\varphi$	$UR$	$UL$	$UC$
4	200	1,2	?	240	50	1,1	?	?	?	?	?	?
5	150	?	18	380	50	?	?	1500	?	?	?	?
6	400	?	32	200	400	0,3	?	?	?	?	?	?

## Задача 3.

Дифракционная решетка имеет постоянную  $d$ , число штрихов на единицу длины  $N_0$ . Монохроматический свет с длиной волны  $\lambda_1$ , падая на решетку нормально, дает дифракционный максимум порядка  $m_1$  под углом  $\varphi_1$ . При падении естественного света на эту решетку нормально некоторая линия с длиной волны  $\lambda$  в спектре порядка  $t$  имеет угол дифракции  $\varphi_m$ .

Определить:

- 1) величины, обозначенные в табл. 11.11.3 знаком «?»;
- 2) сколько максимумов можно наблюдать в этой решетке в естественном свете ( $m_{\max}$ );
- 3) угол дифракции последнего максимума ( $\varphi_{\max}$ );
- 4) каков будет  $\phi_{\max}^*$ , если естественный свет будет падать на решетку под углом  $\alpha$ .

Таблица 11.11.3

№ варианта	$d, \text{ мкм}$	$N_0, \text{ 1/м}$	$\lambda_1, \text{ нм}$	$m_1$	$\varphi_1, ^\circ$	$\lambda, \text{ нм}$	$t$	$\varphi_m, ^\circ$	$m_{\max}$	$\phi_{\max}$	$\alpha, ^\circ$	$\phi_{\max}^*$
1	?	?	600	2	15	?	3	20	?	?	30	?
2	?	?	450	1	12	?	4	30	?	?	20	?
3	?	?	?	3	24	760	2	10	?	?	45	?
4	10	?	?	2	15	400	?	25	?	?	15	?
5	?	$2 \cdot 10^5$	380	3	?	?	1	12	?	?	25	?
6	20	?	?	4	32	?	3	28	?	?	40	?



## Контрольные вопросы к главам 10, 11

1. Типы колебаний. Гармонические колебания.
2. Свободные колебания в механической системе. Пружинный маятник. Математический и физический маятники.
3. Свободные колебания в электромагнитном контуре.
4. Затухающие колебания; уравнения, основные характеристики.
5. Вынужденные колебания в механической системе. Явление резонанса.
6. Вынужденные колебания в электромагнитном контуре. Уравнения колебаний.
7. Переменный ток. Резонанс напряжений и токов. Мощность в цепи переменного тока.
8. Сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и частоты. Теорема Фурье, гармонический анализ. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний.
9. Типы волн. Уравнение волны, основные параметры.
10. Интерференция волн. Стоячие волны.
11. Энергия волн, плотность энергии, интенсивность волн.
12. Упругие волны. Звуковые волны; характеристики звука. Ультразвук. Эффект Доплера в акустике.
13. Электромагнитные волны, свет. Уравнение волны, энергия электромагнитных волн.
14. Законы геометрической оптики. Явление полного внутреннего отражения света.
15. Принцип Гюйгенса. Интерференция света. Условия интерференционных максимумов и минимумов. Методы наблюдения интерференции, применение.
16. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Типы дифракции. Дифракционная решётка. Условие максимумов. Применение дифракции.
17. Дисперсия света. Поглощение света, закон Бугера.
18. Поляризация света. Закон Малюса. Способы поляризации света.
19. Эффект Доплера в оптике.

## Список литературы

1. Савельев И. В. Курс физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика 4-е изд. СПб.: Лань, 2008. 480 с.

2. Савченко Н. Д., Кузьмина Т. В., Дружинин А. П., Рахлецова Т. В. Основы физики: учеб. пособие. Ч. 2. Физика колебаний и волн. Основы квантовой механики. Физика атомного ядра и элементарных частиц. Чита: ЗабГУ, 2015. 267 с.

3. Трофимова Т. И. Руководство к решению задач по физике: учеб. пособие для прикладного бакалавриата. 3-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2017. 265 с.

4. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. М.: Физматлит, 2003. 640 с.

5. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Наука, 2005. 512 с.

## Глава 12. Квантовые свойства электромагнитных волн

### 12.1. Законы теплового излучения тел

Источником электромагнитных волн являются различные процессы, начиная с колебательного движения зарядов в электрических цепях и пространстве (радиоволны с длиной волны от  $10^5$  м до  $10^{-3}$  м) и заканчивая переходами нуклонов в ядре атома ( $\gamma$ -излучение с длиной волны  $10^{-12}$ – $10^{-14}$  м). Однако самым распространенным является излучение тел, обусловленное их нагреванием. Электромагнитные волны, испускаемые атомами, которые возбуждаются за счет энергии теплового движения, представляют собой *тепловое излучение*. При низких температурах тел это излучение невидимо (*инфракрасные волны*), при повышении температуры оно становится видимым глазу (*световые волны*). Так как тела не только излучают, но и поглощают электромагнитные волны, возможна ситуация, когда излучение находится в равновесии с веществом. Такое излучение называется *равновесным*. Строго говоря, равновесное излучение существует только в замкнутых (теплоизолированных) системах тел, когда оно не рассеивается в окружающее пространство.

*Излучательная способность тела*

$$r_{\omega} = \frac{dR_{\omega}}{d\omega} \quad (12.1.1)$$

$dR_{\omega}$  – энергия, излучаемая единицей поверхности тела в единицу времени в интервале частот  $[\omega \div \omega + d\omega]$ .

*Энергетическая светимость тела*

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega, \quad (12.1.2)$$

$R$  определяется для заданной температуры и представляет собой мощность излучения с единицы поверхности тела во всем диапазоне частот. Для диапазона длин волн *энергетическая светимость*

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d_{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}; \quad r_{\lambda} = \frac{dR_{\lambda}}{d\lambda}.$$

Поглощательная способность тела

$$a_{\omega} = \frac{d\Phi'_{\omega}}{d\Phi_{\omega}}, \quad (12.1.3)$$

$d\Phi'_{\omega}$  – часть потока падающего излучения  $d\Phi_{\omega}$ , которая поглощается телом в интервале частот  $[\omega \div \omega + d\omega]$ . Если тело поглощает весь падающий на него поток энергии, оно называется *абсолютно черным телом*. Для него  $a_{\omega} = 1$ .

За счет поглощения всей падающей энергии температура абсолютно черного тела быстро возрастает, соответственно возрастает и его излучение. Поэтому абсолютно черное тело может быть ослепительно ярким. Солнце можно считать абсолютно черным телом.

Чем больше тело поглощает энергии, тем больше оно будет излучать за счет повышения температуры. Поэтому  $r_{\omega}$  и  $a_{\omega}$  связаны между собой *законом Кирхгофа*: «Отношение излучательной способности к поглощательной способности тела не зависит от природы тела и является универсальной функцией частоты излучения и температуры тела»:

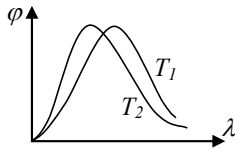
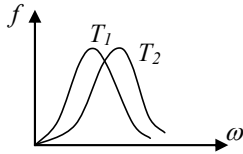
$$\frac{r_{\omega}}{a_{\omega}} = f(\omega, T). \quad (12.1.4)$$

По физическому смыслу  $f(\omega, T)$  есть *излучательная способность абсолютно черного тела* (т. к.  $a_{\omega} = 1$ ). При переходе к длинам волн Закон Кирхгофа имеет вид

$$\frac{r_{\lambda}}{a_{\lambda}} = \phi(\lambda, T),$$

где  $f(\omega, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \phi(\lambda, T)$ .

Функция  $f(\omega, T)$  имеет максимум, который при увеличении температуры тела сдвигается в сторону больших частот (меньших длин волн) (см. рис. 12.1.1). Количественные измерения дали экспериментальный *закон смещения Вина*



$$T_2 > T_1$$

Рис. 12.1.1.

Экспериментальный вид универсальной функции Кирхгофа

$$T\lambda_m = b, \quad (12.1.5)$$

$b$  – постоянная Вина;  $\lambda_m$  – длина волны, соответствующая максимуму  $\phi(\lambda, T)$ .

Анализируя экспериментальные данные, Стефан и Больцман определили зависимость мощности излучения от температуры. Закон Стефана – Больцмана

$$R = \sigma T^4. \quad (12.1.6)$$

«Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры».

Первый теоретический расчет универсальной функции  $f(\omega, T)$  сделали Релей и Джинс.

Они предложили единственное с точки зрения классической физики правильное решение, что энергия теплового движения молекул переходит в энергию теплового излучения, т. е.

на каждую частоту  $\omega$  приходится  $kT$  тепловой энергии ( $\frac{1}{2}kT$  –

на электрическое и  $\frac{1}{2}kT$  – на магнитное поле),  $k$  – постоянная

Больцмана. Расчет дал теоретическую формулу Релея – Джинса

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (12.1.7)$$

Эта формула описывала универсальную функции только для области низких частот (больших длин волн), а для высоких частот не соответствовала эксперименту (*ультрафиолетовая катастрофа*). Это был кризис классической теории.

## 12.2. Квантовая гипотеза и формула Планка

В 1900 г. М. Планк показал, что ультрафиолетовую катастрофу в теории можно устранить и добиться согласия с экспериментом. Так как атомы излучают волны строго определенных частот (линейчатые спектры), они являются излучателями-осциллято-

рами, энергия которых принимает только дискретные значения, кратные частоте. Из этого положения и из закона сохранения энергии следует, что излучение происходит порциями или квантами, причем энергия одной порции пропорциональна частоте излучения

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad (12.2.1)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка.

Тогда энергия излучения на какой-то частоте равна  $\varepsilon_n = n\hbar\omega$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), т. е. равна целому числу квантов. Согласно распределению по энергиям Больцмана, вероятность того, что энергия излучения равна  $\varepsilon_n$

$$P_n = Ae^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} = Ae^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}, \quad (12.2.2)$$

$A$  – нормировочный множитель, который можно найти из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1. \quad (12.2.3)$$

$$A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}.$$

Данные формулы теории вероятностей, возможно, использовать, так как энергия одного кванта чрезвычайно мала и  $n$  принимает действительно очень большие значения. Вероятность с учетом (12.2.3) равна

$$P_n = \frac{e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}. \quad (12.2.4)$$

Среднее значение энергии излучения

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}, \quad (12.2.5)$$

где  $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ .

Вид средней энергии позволяет применить простые математические операции

$$\vec{\varepsilon} = -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left( \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right). \quad (12.2.6)$$

Под знаком логарифма – сумма членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным единице

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}. \quad (12.2.7)$$

Подставляя (12.2.7) в (12.2.6) и выполнив дифференцирование по  $x$ , получим

$$\vec{\varepsilon} = \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1}. \quad (12.2.8)$$

Произведя обратную замену  $x$  получаем

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (12.2.9)$$

Заменив в формуле Релея – Джинса (12.1.7) среднюю энергию излучения  $kT$  на энергию  $\vec{\varepsilon}$ , получим значение универсальной функции, получившей название *формула Планка*

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2 (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)}. \quad (12.2.10)$$

*Формула Планка для длин волн*

$$\phi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^3}{\lambda^5 \left( e^{\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}} - 1 \right)}.$$

Эта формула точно согласуется с экспериментальными данными во всем интервале частот. В некантовой области низких частот  $\hbar\omega \ll kT$ , используя разложение в ряд экспоненциальной

функции  $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$  получим формулу Релея – Джинса (12.1.7).

Исследуя функцию (12.2.10) на максимум, получаем значение частоты, соответствующей максимуму

$$\omega_m = \frac{2,8kT}{\hbar},$$

или длины волны  $\lambda_m = \frac{2\pi c\hbar}{2,8kT}$ , откуда следует закон Вина

$$\lambda_m T = \frac{\pi c\hbar}{1,4k} = b.$$

Энергетическая светимость абсолютно черного тела

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} T^4$$

приводит к закону Стефана – Больцмана (12.1.6).

Квантовая гипотеза и формула Планка позволили объяснить законы теплового излучения тел и положили начало квантовой механики.

### 12.3. Фотоэлектрический эффект

Фотоэлектрические явления заключаются в эмиссии (испускании) электронов веществом, в увеличении его проводимости и в возникновении ЭДС под действием электромагнитного излучения. В основе этих явлений лежит *фотоэффект* (см. рис. 12.3.1). Его сущность состоит в том, что за счет энергии электромагнитного излучения происходит освобождение электронов, которые или вырываются из вещества в вакуум (внешний фотоэффект), или переходят из связанного состояния; свободное без эмиссии наружу (внутренний фотоэффект).

Внешний фотоэффект обнаружил Г. Герц, детально изучил в 1888 г. А. Г. Столетов и в 1889 г. Ф. Ленард. Внешний фотоэффект регистрируется по фототоку. Схема простейшего фотоэлемента: внутри колбы – вакуум. Электроны выбиваются с катода под действием света.

Для внешнего фотоэффекта основные закономерности получили название *законы Столетова* и состоят в следующем:



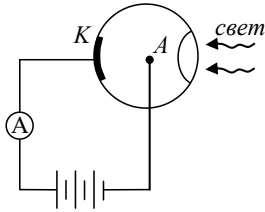


Рис. 12.3.1. Схема простейшего фотоэлемента:  
A – анод; K – катод

1. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности излучения, а зависит прямо пропорционально от частоты излучения

$$\frac{1}{2}mv^2 = a\omega - \phi. \quad (12.3.1)$$

2. При фиксированной частоте излучения сила фототока пропорциональна интенсивности излучения

$$I_{\phi} \sim \Phi \quad (12.3.2)$$

3. Для каждого вещества существует граничная частота  $\omega_0$ , такая, что излучение с частотой  $\omega < \omega_0$  фотоэффект не вызывает. Это непосредственно следует из уравнения (12.3.1) закона Столетова, так как кинетическая энергия всегда положительна. Тогда  $a\omega - \phi > 0$  и  $\omega > \frac{\phi}{a} = \omega_0$ .  $\omega_0$  – красная граница фотоэффекта.

Законы внешнего фотоэффекта объяснил Эйнштейн. В основе его объяснения лежало предположение о существовании электромагнитных квантов, которые Эйнштейн назвал *фотонами*. При поглощении фотонов веществом, происходит их взаимодействие с электронами, которые получают дополнительную энергию. Этой энергии должно быть достаточно, чтобы выбить электрон из вещества и сообщить ему кинетическую энергию. При невысокой интенсивности излучения каждый фотоэлектрон выбивается одним фотоном. В этом случае скорость (кинетическая энергия) фотоэлектрона зависит только от энергии фотона и закон сохранения и превращения энергии дает выражение

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}mv^2 + A. \quad (12.3.3)$$

Это соотношение получило название: *уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*.  $A$  – работа выхода электрона из вещества. Она является характеристикой вещества, содержится в таблицах параметров и используется при расчетах не только фотоэффекта, но и термоэлектронной эмиссии, термоЭДС и т. д.

Сравнивая уравнение (12.3.3) с уравнением (12.3.1) получаем для красной границы фотоэффекта

$$\omega_0 = \frac{A}{\hbar}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A} = \frac{hc}{A}. \quad (12.3.4)$$

Если излучение становится интенсивным, то красная граница фотоэффекта расплывается. Это происходит от того, что плотность фотонов настолько велика, что возрастает вероятность поглощения одним электроном сразу нескольких фотонов и его энергия становится достаточной для вылета из вещества, хотя частота излучения будет меньше  $\omega_0$ .

При многофотонном эффекте, когда электрон получает энергию от  $N$  фотонов, уравнение Эйнштейна

$$N\hbar\omega = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + A.$$

Внутренний фотоэффект заключается в перераспределении электронов твердых диэлектриков и полупроводников по энергетическим зонам под действием электромагнитного излучения. При поглощении фотонов электроны переходят в зону проводимости. В результате возрастает концентрация носителей тока в веществе и его проводимость увеличивается. Это явление называется *фотопроводимостью*, а элементы цепи – *фотосопротивления*.

При освещении *p-n* перехода при контакте полупроводников или контакта полупроводник – металл за счет разной концентрации носителей тока создается электродвижущая сила, называемая *фотоЭДС*. Последовательное соединение многих источников фотоЭДС образует солнечную батарею. Такие батареи являются единственными источниками энергии на борту космических станций.

## 12.4. Эффект Комптона

Эффект был обнаружен А. Комптоном в 1922 г. при рассеянии рентгеновских лучей в парафине. Комптон получил эмпирическую формулу для увеличения длины волны излучения

$$\Delta\lambda = \lambda_0(1 - \cos\theta),$$

где  $\lambda_0$  – постоянная; ( $\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-2} A$ ),  $\theta$  – угол рассеяния.

С повышением частоты излучения его фотоэлектрическое поглощение веществом уменьшается и становится совсем несущественным на частотах, на которых энергия одного фотона значительно превышает энергию связи электрона в атоме. Это объясняется тем, что в этом случае электроны практически неотличимы от свободных частиц. Свободный же электрон фотон не поглощает. С ростом частоты на смену фотоэлектрическому поглощению приходит *рассеяния фотонов на электронах*. Это рассеяние называется *эффектом Комптона* и наблюдается для рентгеновского диапазона электромагнитного излучения.

Рассмотрим рассеяние фотона на свободном электроне, находившемся до столкновения в покое. С электроном, энергия покоя которого  $m_0c^2$  сталкивается фотон с энергией  $\hbar\omega_1$  и импульсом  $\hbar\vec{k}_1$ .

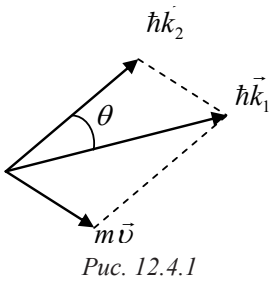


Рис. 12.4.1

Закон сохранения импульса записан в векторной форме, что дает следующее графическое представление (см. рис. 12.4.1).

Законы сохранения энергии и импульса дают систему уравнений

$$\begin{cases} \hbar\omega_1 + m_0c^2 = \hbar\omega_2 + mc^2 \\ \hbar\vec{k}_1 = m\vec{v} + \hbar\vec{k}_2 \end{cases} \quad (12.4.1)$$

Разделив 1-е уравнение системы на  $c$  и заменив  $\frac{\omega_1}{c} = k_1$ ,  $\frac{\omega_2}{c} = k_2$ , получим

$$mc = m_0c + \hbar(k_1 - k_2).$$

Возведем это уравнение в квадрат:

$$m^2c^2 = m_0^2c^2 + 2m_0c\hbar(k_1 - k_2) + \hbar^2k_1^2 - 2\hbar^2k_1k_2 + \hbar^2k_2^2. \quad (12.4.2)$$

Из рисунка закона сохранения импульса (12.4.1), используя теорему косинусов, получаем

$$m^2v^2 = \hbar^2k_1^2 + \hbar^2k_2^2 - 2\hbar^2k_1k_2 \cos\theta. \quad (12.4.3)$$

Вычитая из (12.4.2) уравнение (12.4.3) с учетом того, что  $m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$ , получим:

$$m_0 c(k_1 - k_2) = \hbar k_1 k_2 (1 - \cos \theta).$$

Разделив обе части уравнения на  $m_0 c k_1 k_2$ , получим

$$\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} = \frac{\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

и, заменяя  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$  -  $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ , получим окончательно решение

в виде

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (12.4.4)$$

$\Omega = \frac{\hbar}{m_0 c}$  - получило название *комптоновская длина волны*.

Проведенные теоретические расчеты подтвердили экспериментальные исследования Комптона и непосредственно ввели существование у электромагнитного излучения корпускулярных свойств. Этим доказывалось существование фотонов. Комптоновская длина волны является существенно квантовой и релятивистской величиной, так как при  $\hbar \rightarrow 0$  и  $c \rightarrow \infty$  она обращается в нуль. Поэтому комптоновская длина волны является характеристической длиной в квантовой теории.

Комптоновское рассеяние широко используется в исследованиях атомов, ядер и элементарных частиц, а также лежит в основе действия спектрометров  $\gamma$ -излучения, где формирование сигнала начинается с регистрации комптоновских электронов отдачи.

## Глава 13. Элементы квантовой механики

### 13.1. Корпускулярно-волновой дуализм

В классической механике представление о частице является противоположным представлению о волне. Классическая частица – это сгусток материи, сосредоточенный в малом объеме. Волна же всегда занимает конечную часть пространства, иногда очень большую. Такой взгляд на природу частиц и волн просуществовал до 20-х гг. XX столетия и был пересмотрен под давлением экспериментов и опытных фактов в физике микромира.

Объединение представлений о волнах и частицах привело к открытию фундаментального закона природы, названного *корпускулярно-волновым дуализмом*.

Корпускулярно-волновой дуализм в оптических явлениях:

1. Волновые свойства электромагнитного излучения – интерференция, дифракция

2. Корпускулярные свойства – фотоэффект, эффект Комптона  
Корпускулярно-волновой дуализм для частиц:

1. Дифракция электронов, открытая К. Дэвиссоном

2. Дифракция атомных пучков, открытая О. Штерном

Корпускулярно-волновой дуализм состоит в том, что любой микроскопический объект обладает как свойствами частицы, так и свойствами волнового поля. Энергия микрообъекта пропорциональна частоте его волны, а импульс пропорционален волновому вектору. Оба коэффициента пропорциональности одинаковы, не зависят от природы микрообъекта и равны постоянной Планка

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad (13.1.1)$$

$$\vec{P} = \hbar\vec{k}. \quad (13.1.2)$$

Движению в пространстве частицы с энергией  $\varepsilon$  и импульсом  $P$  соответствует волна с частотой  $\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}$  и волновым числом

$$k = \frac{\vec{P}}{\hbar} \left( \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{P} \right).$$

Квантовые свойства микроскопических объектов существуют только благодаря отличию постоянной Планка от нуля, при  $\hbar \rightarrow 0$  они исчезают. Поэтому квантовая механика содержит классическую как предел, который формально достигается при стремлении постоянной Планка к нулю.

Дуализм волн и частиц впервые был сформулирован в 1924 г. Луи де Бройлем в виде гипотезы о том, что корпускулярно-волновой дуализм является универсальным свойством материи. Эта гипотеза не опиралась на классическую физику и была встречена с негодованием даже Эйнштейном.

Для каждой частицы между ее энергией и импульсом существует зависимость, которая не является универсальной:

$$\varepsilon = \frac{P^2}{2m} \quad \text{— для нерелятивистской частицы;}$$

$$\varepsilon = c\sqrt{P^2 + m_0^2 c^2} \quad \text{— для релятивистской частицы;}$$

$$\varepsilon = cP \quad \text{— для фотонов.}$$

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно. Всегда есть некоторая ошибка измерений  $\Delta$ , которая в квантовой механике называется *неопределенностью физической величины*. В классической механике нет принципиальных ограничений на точность измерений. В физике микромира есть принципиальные ограничения, не связанные с аппаратурой и являющиеся фундаментальным свойством материи. Эти ограничения называются *соотношением неопределенностей*, наиболее важными из которых являются два.

Первое ограничивает точность одновременного измерения координат частицы и соответствующих компонент ее импульса. Например, для координаты  $x$

$$\Delta x \Delta P_x \geq \hbar. \quad (13.1.3)$$

Второе соотношение устанавливает предел точности измерения энергии за данный промежуток времени

$$\Delta t \Delta \varepsilon \geq \hbar. \quad (13.1.4)$$

Впервые соотношение неопределенностей были сформулированы в 1927 году В. Гейзенбергом и получили его имя.

Наличие волновых свойств у частиц приводит к тому, что теряется смысл у понятия *траектория*. А траектория давала  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , а следовательно и компоненты импульса  $P_x = mv_x$ ,  $P_y = mv_y$ ,  $P_z = mv_z$ . Поэтому корпускулярно-волновой дуализм привел к соотношению неопределенностей.

### 13.2. Волновая функция. Операторы квантовой механики

В классической механике при одномерном движении частицы вдоль оси  $x$  состояние частицы в каждый момент времени задается величинами: координатой  $x(t)$  и импульсом  $P_x = mv_x$ . Такое определение состояния полностью утрачивает смысл, с ним теряет смысл и понятие силы, поэтому квантовая механика развивалась путем введения в нее функций волнового типа.

В классической механике, зная траекторию  $x(t)$  и массу частицы можно определить все физические величины

$$\frac{dx}{dt} = v_x \text{ — скорость;}$$

$$mv_x = P_x \text{ — импульс;}$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \text{ — сила;}$$

$$W = \frac{mV^2}{2} \text{ — кинетическая энергия;}$$

$$U = - \int F(x) dx \text{ — потенциальная энергия.}$$

В квантовой механике состояние частицы задается волновой функцией, которая является в общем случае комплексной и определяется во всех точках пространства в каждый момент времени.

Волновая функция  $\Psi(x, y, z, t)$  формально является полем в математическом смысле. В классической механике статистические свойства проявляются только для большого числа частиц. В квантовой механике статистические свойства присущи движе-

нию любой *отдельной микрочастицы*. Поэтому:  $|\Psi|^2 dV$  – вероятность того, что частица находится в объеме  $dV = dx dy dz$ .

$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$  – плотность вероятности.

$\int_V |\Psi|^2 dV = 1$  – условие нормировки.

В одномерном случае:

$$\Psi = \Psi(x, t).$$

$|\Psi|^2(x, t) dx$  – вероятность нахождения частицы на участке  $dx$ .

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1$  – условие нормировки.

$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi|^2 dx$  – среднее значение координаты частицы.

Так как волновая функция полностью определяет состояние частицы, она должна определять такие параметры как координаты, энергию, импульс, момент импульса и т. д.

Если возможными являются состояния с волновыми функциями  $\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \dots$ , то существует состояние с функцией

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n, \quad (13.2.1)$$

это *принцип суперпозиции состояний*.  $C_n$  – некоторые постоянные.

При непрерывном изменении физической величины  $q$  принцип суперпозиции состояний дает формулу

$$\Psi = \int c(q) \Psi(q) dV.$$

В классической механике, где состояние частицы задается двумя параметрами, движение определяется силой, содержащей производную второго порядка от времени. В квантовой механике состояние частицы задается *одной* функцией  $\Psi$ , поэтому уравнение движения должно содержать только её.



Математический аппарат квантовой механики соединяет в себе анализ, теорию вероятностей и операционное исчисление, где операторы получили название по названиям физических величин.

Оператор означает действие, которое переводит одну функцию в другую. Известны математические операторы Гамильтона

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ и Лапласа } \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если  $F$  – некоторая физическая величина, принимающая ряд значений  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (спектр значений), а  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$  – соответствующие этим значениям волновые функции (собственные функции), то квантовомеханические операторы вводятся так, что их действие на волновую функцию даст

$$\hat{F} \Psi = F_n \Psi_n. \quad (13.2.2)$$

Это основное операторное уравнение квантовой механики, позволяющее определить собственные значения физических величин. Например, среднее значение координаты  $x$

$$\bar{x} = \int x |\Psi|^2 dx = \int \Psi^* x \Psi dx = \int \Psi^* \hat{x} \Psi dx.$$

Из этого уравнения следует, что *оператор координаты*  $\hat{x} = x$  и его действие на  $\Psi$  есть просто умножение волновой функции на координату  $\hat{x} \Psi = x \Psi$ .

Квазиклассический вид волновой функции  $\Psi = ae^{\frac{iS}{\hbar}}$ , где  $S$  – действие (из аналитической механики). Тогда импульс частицы

$$\vec{P} = \text{grad} S = \nabla S.$$

Оператор импульса можно получить из квазиклассического вида волновой функции, если взять её градиент

$$\nabla \Psi = ae^{\frac{iS}{\hbar}} \cdot \frac{i}{\hbar} \nabla S = \frac{\Psi i P}{\hbar}.$$

Умножив обе части уравнения на  $-i\hbar$ , получим  $-i\hbar\nabla\Psi = P\Psi$ , откуда следует вид оператора

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (13.2.3)$$

Операторы компонент импульса

$$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{P}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{P}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}.$$

Квадрат оператора импульса

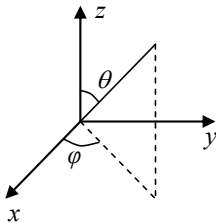
$$\hat{P}^2 = -\hbar^2\Delta = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \quad (13.2.4)$$

Момент импульса – третья физическая величина, которая сохраняется в замкнутых системах. Он вводится в классической механике  $\vec{l} = [\vec{r}, \vec{P}]$  и имеет компоненты по осям координат

$$l_x = yP_z - zP_y; \quad l_y = zP_x - xP_z; \quad l_z = xP_y - yP_x.$$

Оператор момента импульса  $\hat{l} = [\hat{r}, \hat{P}]$ .

Операторы компонент момента импульса  $\hat{l}_x = y\hat{P}_z - z\hat{P}_y$ ,  $\hat{l}_y = z\hat{P}_x - x\hat{P}_z$ ,  $\hat{l}_z = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x$ , что дает при подстановке операторов координат и операторов компонент импульса



$$\begin{aligned} \hat{\hbar}l_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \hat{\hbar}l_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \hat{\hbar}l_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

Рис. 13.2.1.

Сферическая система координат

Множитель  $\hbar$  поставлен для соблюдения размерности. В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  (см. рис. 13.2.1)

$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$ , что дает операторное уравнение (13.2.2) в виде

$$\hat{l}_z \Psi = l_z \Psi \quad \text{или} \quad -i\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = l_z \Psi. \quad (13.2.6)$$

Это простейшее дифференциальное уравнение  $\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} - il_z\Psi = 0$ , решением которого является функция  $\Psi = f(r, \theta)e^{il_z\phi}$   $f(r, \theta)$  – произвольная функция  $r$  и  $\theta$ . Для того, чтобы  $\Psi$  была однозначна, необходимо, чтобы она была по  $\varphi$  периодична с периодом  $2\pi$ , т. е.  $\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2\pi)$ . Это дает

$$\Psi(\phi + 2\pi) = f(r, \theta)e^{il_z\phi} \cdot e^{i2\pi l_z} = \Psi \cdot e^{i2\pi l_z}.$$

Это возможно только тогда, когда  $l_z = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

По формулам Эйлера:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ , при  $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ .

$$e^{ix} = e^{-ix} = \cos x = 1.$$

Тогда значение компоненты момента импульса

$$\left| \vec{l}_z \right| = \hbar m, \quad (13.2.7)$$

а значение самого момента импульса

$$\left| \vec{l} \right| = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (13.2.8)$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots$  – целые  $m$ .

Оператор кинетической энергии вводится как

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad \text{или} \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (13.2.9)$$

Оператор потенциальной энергии вводится как и оператор координаты  $\hat{U}\Psi = U\Psi$  и получаем  $\hat{U} = U$ .

В классической механике функция Гамильтона для частицы  $H = T + U$  имеет смысл полной энергии частицы. Полная энергия частицы в квантовой механике обозначается как  $E$ .

Квантовомеханический оператор Гамильтона (гамильтониан) вводится как

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U. \quad (13.2.10)$$

Так как  $\hat{H}$  – известен, то уравнение (13.2.2) определяет вид волновой функции. Например для *стационарных состояний* частицы с энергией  $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$ , имеем

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n, \quad (13.2.11)$$

$\Psi_n$  – собственные функции оператора  $\hat{H}$ .

### 13.3. Уравнение Шредингера

При движении частицы в силовом поле, в классической механике основным уравнением, описывающим это движение является уравнение II закона Ньютона

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\text{grad}U.$$

В одномерном случае

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

В квантовой механике уравнение движения частицы в силовом поле называется *уравнением Шредингера*, которое записывается аналогично уравнению Ньютона, но в операторном виде

$$\frac{\partial \hat{P}\Psi}{\partial t} = -\text{grad} \hat{H}\Psi.$$

В общем случае уравнение Шредингера при подстановке оператора импульса и гамильтониана имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (13.3.1)$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $U$  – потенциальная энергия частицы.

В одномерном случае уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \text{ для движения частицы вдоль оси } x.$$

С математической точки зрения уравнение Шредингера – линейное дифференциальное уравнение в частных производных. Оно имеет много решений, причем таких, что всякая линейная комбинация решений также является решением уравнения. Это означает, что квантовая частица в силовом поле может находиться во многих состояниях, которые подчиняются принципу суперпозиции.

Среди решений уравнения Шредингера есть *стационарные*. Для получения вида уравнения подставим в общий вид уравнения Шредингера функцию  $\Psi$ , полученную из операторного уравнения для стационарных состояний (13.2.11)  $\hat{H}\Psi = E_n\Psi_n$  и получим

$$-\nabla i\hbar\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} = -\nabla E_n\Psi_n \text{ или } i\hbar\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} = E_n\Psi_n.$$

Уравнение  $\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} + \frac{iE_n}{\hbar}\Psi_n = 0$  является простым дифференциальным уравнением, которое имеет решение

$$\Psi_n = \phi(x, y, z)e^{\frac{iE_n t}{\hbar}}. \quad (13.3.2)$$

Подставляя это решение в (13.3.1) получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} + U\phi e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} = i\hbar\phi e^{\frac{iE_n t}{\hbar}}\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right).$$

Получаем, сократив обе части на  $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ ,  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (E - U)\phi$

или в общем виде

$$\Delta \phi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\phi = 0. \quad (13.3.3)$$

Это уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы с энергией  $E$  в силовом поле  $U$ .

Если частица с энергией  $E$  движется свободно в отсутствии силовых полей, то в уравнении (13.3.3) нужно положить  $U = 0$ . Тогда уравнение Шредингера для свободного движущейся частицы имеет вид в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi = 0. \quad (13.3.4)$$

Это простое дифференциальное уравнение, которое при замене  $\omega_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  имеет вид  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega_0^2 \phi = 0$  и решение

$$\phi = ae^{i\omega_0 x}, \quad (13.3.5)$$

где  $a = \text{const}$ .

Энергия и импульс для нерелятивистской частицы и в квантовой и в классической механике связаны между собой одной формулой

$$E = \frac{P^2}{2m},$$

отсюда

$$\frac{2mE}{\hbar} = \frac{P^2}{\hbar^2} \text{ или } \omega_0 = \frac{P}{\hbar}.$$

Подставляя (13.3.5) в (13.3.2) получим вид волновой функции для свободно движущейся частицы с энергией  $E$  и импульсом  $P$

$$\Psi = ae^{-\frac{i}{\hbar}Et} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}Px}. \quad (13.3.6)$$

Подставляя  $E$  и  $P$  из волновых свойств частиц, получаем

$$\Psi = ae^{-i\omega t + ikx}, \quad (13.3.7)$$

а это есть в обычной теории уравнение плоской волны в направлении оси  $x$ . Поэтому функция  $\Psi$  и получила название *волновая функция*. А само движение частицы – *волна де Бройля*.

### 13.4. Частица в потенциальной яме

Простейшим примером пространственно-ограниченного движения является одномерное движение квантовой частицы в очень глубокой потенциальной яме с вертикальными стенками (см. рис. 13.4.1).

Потенциальная энергия в этом случае имеет вид

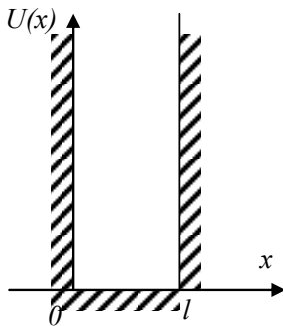


Рис. 13.4.1

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0 \text{ и } x > l \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq l \end{cases}.$$

В точках  $x = 0$   $x = l$  находятся стенки ямы. Так как частица не может выйти за пределы ямы, уравнение Шредингера дополняется граничными условиями

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(l) = 0 \end{cases}. \quad (13.4.1)$$

Внутри ямы уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi = 0. \quad (13.4.2)$$

Вводя  $\omega_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , получаем решение уравнения в виде гармонических функций

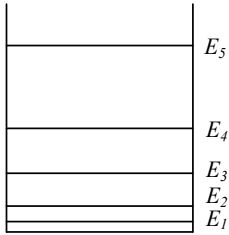
$$\phi(x) = Ae^{i\omega_0 x} + Be^{-i\omega_0 x}. \quad (13.4.3)$$

Первое граничное условие (13.4.1) дает  $A + B = 0$  или  $B = -A$ .

Заменяя  $A = \frac{c}{2i}$ , получаем

$$\phi(x) = c \left( \frac{e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}}{2i} \right) = c \sin \omega_0 x.$$

Второе граничное условие (13.4.1) дает



$$\sin \omega_0 l = 0 \text{ или } \omega_0 l = \pm n\pi, \quad (13.4.4)$$

где  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  – любое целое число.

$$\text{Получаем } \omega_0^2 l^2 = n^2 \pi^2, \quad \frac{2mE}{\hbar^2} l^2 = n^2 \pi^2.$$

Это дает нам спектр энергий частицы

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2. \quad (13.4.5)$$

Рис. 13.4.2

Разность соседних уровней энергетического спектра, рис. 13.4.2,

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1).$$

Постоянную  $C$  получаем из условия нормировки  $C = \sqrt{2/l}$ ,

$$\text{и тогда общий вид функции } \phi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Решение этой задачи показывает, что при пространственно-ограниченном движении частицы ее энергия принимает строго определенные *квантованные* значения. Так как импульс прямо связан с энергией его значения тоже квантуются. Третья физическая величина, которая сохраняется в замкнутых системах – момент импульса. Для него и его компоненты  $|\vec{l}_z|$  получены выражения (13.2.7) и (13.2.8), где  $m$  – набор целых чисел (положительных и отрицательных), отличающихся на единицу. Такими же свойствами обладает набор  $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$ . Тогда уравнение (13.2.6) имеет решение (для  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ )

$$\Psi(\phi + 2\pi) = f(r, \theta) e^{im_s \phi} \cdot e^{\pm i\pi} = -\Psi(\phi),$$

т. к.  $e^{\pm i\pi} = -1$  по формулам Эйлера.



Функции  $\Psi$  и  $-\Psi$  физически равноправны. Так как уравнение Шредингера для них одно, а плотность вероятности  $|\Psi|^2 = |-\Psi|^2$ .

Получаем знаковую неопределенность волновой функции, что означает наличие у частицы еще одной степени свободы, не связанной с её движением в пространстве. Эта степень свободы определяет особую характеристику частицы – *спин*  $|\vec{S}|, |\vec{S}_z|$  – магнитный спин.

Исследования Эйнштейна, Уленбека, Гаудсмита показали наличие у всех квантовых частиц механического момента – *спина*, который не имеет классических аналогов. Абсолютное значение спина

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)}; s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots;$$

$$S_z = \hbar m_s; m_s = -s, -s+1, \dots, 0, \dots, s.$$

## Глава 14. Квантовомеханическое описание атомов и молекул

### 14.1. Боровская теория атома

Теория водородоподобного атома, созданная Нильсом Бором в 1913 г. опиралась на многочисленные экспериментальные исследования, основными из которых являлись опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$  – частиц на золотой фольге, опыты Франка и Герца по взаимодействию потока электронов с атомами ртути, опыты Бальмера по исследованию спектров атома водорода. Резерфорд, оценивая результаты своих опытов, писал: «... Невозможно получить эффект такого порядка, если не считать, что основная часть массы атома сконцентрирована в небольшом ядре. Именно тогда у меня возникла идея атома с крохотным тяжелым центром, несущим заряд». Опыты привели к модели атома Резерфорда, представляющая собой положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена практически вся масса атома и электронов, движущихся вокруг ядра.

Водородоподобный атом состоит из ядра с положительным зарядом  $ze$  и электрона, который движется вокруг него:  $z = 1$  для атома водорода,  $z = 2$  для однократно ионизированного гелия,  $z = 3$  для двухкратно ионизированного лития.

Опыты Франка и Герца по взаимодействию электронов с атомами ртути при движении электронов в вакуумной лампе с парами ртути показали, что атомы поглощают энергию не непрерывно, а только строго определенными порциями. Исследование спектров испускания атома водорода Бальмером показали, что частоты всех линий спектра испускания (или поглощения) атома водорода описывается простой формулой

$$\omega = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (14.1.1)$$

в которой  $R$  – константа, называемая постоянной Ридберга,  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $n = m + 1, m + 2, \dots$

Постоянная Ридберга имеет размерность частоты и равна:  $R = 2,1 \cdot 10^{16} \text{с}^{-1}$ .

Все эти исследования привели к понятию энергетического спектра. «Энергетическим спектром физической системы (в том числе атома) называют совокупность всех возможных значений энергии, которую система может иметь. Если спектр дискретен, то каждое значение энергии в нем называются энергетическим уровнем. Низший уровень называется основным, остальные – возбужденными».

В теории Бора энергетический спектр атома связывается с частотами спектра излучения (и поглощения). В то же время Бор пытался сохранить положения классической теории, вводя два своих постулата:

1. Электроны в атоме могут двигаться только по определенным орбитам, находясь на которых они не излучают энергию. Эти орбиты соответствуют стационарным состояниям атома и определяются условием

$$mvr = n\hbar, \quad (14.1.2)$$

где  $m$  – масса электрона,  $v$  – его скорость на орбите с радиусом  $r$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$  – номер орбиты.

Из первого постулата Бора следует, что момент импульса электрона

$$mvr = L = n\hbar$$

кратен постоянной Планка и измеряется в единицах  $\hbar$

2. Атом излучает квант электромагнитной энергии при переходе электрона с орбиты с большим  $n$  на орбиту с меньшим  $n$ . При обратном переходе атом поглощает квант энергии

$$\hbar\omega = E_n - E_m, \quad (14.1.3)$$

$E_n$  – энергия, которую имеет электрон, находящийся на орбите с номером  $n$ .

Постулаты Бора позволяют рассчитать радиус орбиты, энергии электронов и частоты Бора исходя из классических представлений.

Так как электрон на орбите удерживает кулоновская сила, имеем равенство

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

которое при умножении обеих частей на  $mr^3$  дает

$$m^2 v^2 r^2 = \frac{ze^2 m}{4\pi\epsilon_0} r. \quad (14.1.4)$$

В левой части – квадрат момента импульса. Используя 1-й постулат Бора, получаем

$$n^2 \hbar^2 = \frac{ze^2 m}{4\pi\epsilon_0} r.$$

Отсюда радиусы орбит Бора определяются по формуле

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{zme^2} n^2. \quad (14.1.5)$$

Энергия электрона складывается из кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$  и потенциальной энергии  $-\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Так как  $\frac{mv^2}{2} = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$  из (14.1.4), получаем для энергии выражение

$$E = -\frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Подставляя  $r$  из (14.1.5), получаем окончательное выражение для энергии электрона на  $n$ -й орбите

$$E = -\frac{z^2 me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (14.1.6)$$

Энергия электрона (14.1.6) позволяет получить из 2-го постулата Бора выражение для частот спектра излучения атома

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

что совпадает с экспериментальной формулой Бальмера. Из (14.1.6) получаем теоретическое значение постоянной Ридберга

$$R = \frac{z^2 m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3}.$$

## 14.2. Водородоподобный атом

Теория Бора хорошо описывала водородоподобные атомы, но уже не могла описать атом с двумя или более электронами. Это следствие ее противоречивости, так как она не была ни классической ни квантовой последовательно. Атом является квантовой системой и должен описываться уравнениями квантовой механики. Рассмотрим вначале водородоподобный атом. Используем уравнение Шредингера для стационарных состояний (13.3.2) из гл. 13:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar} \left( E + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \quad (14.2.1)$$

$U = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  – потенциальная энергия электрона.

Так как атом представляет собой центрально-симметричную систему и поле ядра – центральное, уравнение Шредингера необходимо записать в сферической системе координат. Оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Эта запись довольно громоздкая, но после преобразования имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} l(l+1) \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0, \quad (14.2.2)$$

где  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  – число, определяющее момент импульса электрона (13.4.7).

В общем виде решение уравнения (14.2.2) имеет вид

$$\Psi = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (14.2.3)$$

где  $R(r)$  – радиальная часть функции;

$Y_{lm}(\theta, \phi)$  – угловая часть волновой функции;

$Y_{lm}(\theta, \phi)$  представляет собой сферические функции Бесселя.

Иследуем уравнение для радиальной части волновой функции:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar} (E - U) R = 0.$$

Оно решается подстановкой  $R(r) = \frac{f(r)}{r}$  и дает

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f = 0. \quad (14.2.4)$$

Это уравнение Шредингера для движения электрона в поле с потенциальной энергией

$$U(r) = U + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}.$$

$U = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  – кулоновская энергия;  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} = \frac{L^2}{2mr^2}$  – центро-

бежная энергия, где  $L$  – момент импульса,  $I = mr^2$  – момент инерции. Здесь формула схожа с классической, где энергия вращения частицы равна

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Уравнение Шредингера максимально упрощается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] f = 0. \quad (14.2.5)$$

Решение этого уравнения существует и однозначно, если  $E$  принимает значение

$$E = E_n = -\frac{mz^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Этот же результат получен в теории Бора (14.1.6), но получен не из уравнений квантовой механики, а из постулатов, противоречащих классической теории.

Выводы:

1. Волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме полностью определяется числами:

$n = 1, 2, 3, 4 \dots$  – главное квантовое число;

$l = 0, 1, 2, 3, 4 \dots n - 1$  – орбитальное квантовое число;

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$  – магнитное квантовое число;

$S = 0, 1/2, 1$  – спиновое квантовое число;

$S = 0, 1, 2, 3 \dots$  – для бозонов;

$S = \pm 1/2$  – для фермионов (электроны, протоны, нейтроны);

$S = 1$  – для фотона.

*Главное квантовое число  $n$*  определяет  $E_n$ . *Орбитальное квантовое число  $l$*  определяет момент импульса электрона

$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ . *Магнитное квантовое число  $m$*  определяет проекцию момента импульса  $L_z = \hbar m$ . *Спиновое квантовое число*

определяет собственный механический момент электрона  $S = \hbar\sqrt{S(S+1)}$ .

2. Электрон может иметь одно значение  $n$  ( $E_n$ ), но находится в разных состояниях (разные  $l, m, S$ ). Состояние с одинаковой энергией называются *вырожденными*, а их число – *кратностью вырождения*. Кратность вырождения

$$K = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2.$$

В атоме водорода первый уровень ( $n = 1, l, m = 0$ ) имеет  $K = 2$ .

3. Из спектроскопии введены обозначения электрона в состоянии с различными  $l$ :  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ; состояния =  $s, p, d, f, g, h$ .

Состояние электрона обозначается двумя квантовыми числами  $nl$  ( $n$  – число,  $l$  – буква).

*Возможные состояния электрона:*

$n=1$   $1s$

$n=2$   $2s, 2p$

$n=3$   $3s, 3p, 3d$

$n=4$   $4s, 4p, 4d, 4f$ .

4. Испускание и поглощение энергии атомом происходит при переходе электрона из одного состояния в другое, причем возможны только такие переходы, при которых орбитальное квантовое число изменяется на единицу

$$\Delta l = \pm 1. \quad (14.2.6)$$

Это *правила отбора*. Они объясняются тем, что изучаемый фотон имеет собственный момент импульса, равный  $\hbar$ .  $\Delta l = +1$  – происходит испускание фотона,  $\Delta l = -1$  – происходит поглощение фотона.

### 14.3. Распределение электронов в атоме. Таблица элементов Д. И. Менделеева

Уравнение Шредингера для атома с двумя и более электронами точно не решается. Используются приближенные методы теории возмущений, которые основаны на введении *самосогласованного поля*. Полагается, что каждый электрон имеет свою волновую функцию, полученную из уравнения Шредингера для потенциальной энергии, которая рассчитывается усреднением взаимодействия частицы с другими частицами.

Для самосогласованного поля электронные состояния в атоме определяются той же четверкой квантовых чисел  $n, l, m, S$ .

Решения уравнения Шредингера для электрона в самосогласованном поле приводит к зависимости энергии электрона от двух квантовых чисел  $n$  и  $l$ . И хотя зависимость от  $l$  более слабая, состояние с  $n = 4$  и  $l = 2$  имеет большую энергию, чем состояние с  $n = 5$  и  $l = 0$ .

Совокупность электронов с одинаковым  $n$  образует *слой* (или группу). Состояния с одинаковым  $n$  обозначаются заглавными латинскими буквами  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , слои –  $K, L, M, N, O$ .

Возможное число электронов в слое есть *кратность вырождения энергетического уровня*  $2n^2$ .

Совокупность электронов с одинаковыми  $n$  и  $l$  образуют *электронные оболочки* атома. Возможное число электронов в оболочке определяется с учетом спина как  $2(2l + 1)$  для каждого  $n$ .



Оболочки получили название из буквенного обозначения возможных значений  $l$ :  $l = 0$  ( $s$  – оболочка),  $l = 1$  ( $p$  – оболочка),  $l = 2$  ( $d$  – оболочка).

Получаем (используя материал гл. 14.2), что

$K$  – слой содержит 1 оболочку ( $1s$ );

$L$  – слой содержит 2 оболочки ( $2s, 2p$ );

$M$  – слой содержит 3 оболочки ( $3s, 3p, 3d$ ).

В классической механике все частицы *индивидуальны*. Зная начальные координаты, а также массу и скорость, можно построить траекторию движения каждой частицы. В квантовой механике для одинаковых частиц нет понятия траектории, поэтому частицы теряют свою индивидуальность и принципиально неразличимы, или *тождественны*. Важнейшая характеристика квантовой частицы – *спин* определяет ее статические свойства и позволяет разделять электроны в атоме. Частицы, входящие в состав атома являются *фермионами*. Поэтому для электрона магнитный спин

$$S = \pm \frac{1}{2}.$$

Знак показывает направление спина.

Для *фермионов* (частиц с полуцелым спином) в 1940 г. сформулирован *принцип Паули*: «В системе одинаковых фермионов не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии две или более частицы». Для атома принцип Паули означает, что не могут два электрона обладать одинаковым набором квантовых чисел  $n, l, m, S$ . Для частиц с нулевым или целым спином принцип Паули не действует и они способны накапливаться в одном и том же состоянии. Такие частицы подчиняются статистике, разработанной Бозе и Эйнштейном, и называются бозонами.

Электроны в нормальном состоянии атома занимают состояние с наименьшей энергией. Принцип Паули запрещает им собраться всем в одном состоянии и определяет порядок заполнения электронных оболочек, начиная с низких энергий. Распределение электронов по состояниям для каждого атома называется его *электронной конфигурацией*. Оболочка, нацело заполненная электронами, называется *замкнутой*. Электроны этой оболочки не участвуют во взаимодействиях атома с другими (в химических реакциях). Электроны *незамкнутых* оболочек называются

*валентными.* Именно валентные электроны участвуют в химических реакциях, в переходах из одного состояния атома в другое при излучении и поглощении фотонов. Обозначение состояния электрона в конфигурации:  $n^p$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$  главное квантовое число,  $l = s, p, d, f, g \dots$  – значение орбитального квантового числа,  $p$  – число электронов в оболочке. Например:  $1S^1, 1S^2, 2S^1, 2S^2, 2P^3$ .

Квантовая теория объясняет происхождение периодического закона Д. И. Менделеева. В химическую связь вступают только валентные электроны, и атомы с одинаковым числом валентных электронов ведут себя сходным образом, имея не только близкие химические, но и оптические, электрические и магнитные свойства. Все атомы с замкнутыми электронными оболочками образуют инертные газы (см. табл. 14.3.1–14.3.3).

Таблица 14.3.1

<i>Количество электронов в слое (<math>2n^2</math>)</i>		
<i>n</i>	<i>Слой</i>	<i>Число электронов</i>
1	<i>K</i>	2
2	<i>L</i>	8
3	<i>M</i>	18
4	<i>N</i>	32
5	<i>O</i>	50

Таблица 14.3.2

<i>Количество электронов в оболочке <math>2(2l+1)</math></i>		
<i>l</i>	<i>Количество электронов</i>	<i>Состояние</i>
0	2	<i>S</i>
1	6	<i>P</i>
2	10	<i>D</i>
3	14	<i>F</i>
4	18	<i>G</i>

Таблица 14.3.3

## Заполнение электронами оболочек по схеме

$n$	$l$	Элемент	Электронная конфигурация
1	0	$H_1$	$1S$
	0	$He_2$	$1S^2$
2	0,1	$Li_3$	$1S^2 2S$
		$Be_4$	$1S^2 2S^2$
		$B_5$	$1S^2 2S^2 2P$
		...	...
		$Ne_{10}$	$1S^2 2S^2 2P^6$
3	0,1,2	$Na_{11}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S$
		$Mg_{12}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S^2$
		$Al_{13}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S^2 3P$
		...	...
		$Ar_{18}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S^2 3P^6$
4	0,1,2,3	$K_{19}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S^2 3P^6 4S$
		$Ca_{20}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S^2 3P^6 4S^2$
		$Sc_{21}$	$1S^2 2S^2 2P^6 3S^2 3P^6 3d 4S^2$
		...	...

Видим, что для калия ( $K_{19}$ ) идет сначала заполнение оболочек 4S, которая имеет меньшую энергию, чем оболочка 3d.

#### 14.4. Спонтанное и вынужденное излучение атомов. Лазеры

Спин фотона равен единице, поэтому эти частицы являются бозонами, и на них не распространяется принцип запрета Паули. Значит, может быть сколько угодно фотонов в одинаковом состоянии, то есть интенсивность электромагнитного излучения на каждой частоте может достигать сколь угодно больших значений. Фотоны испускаются только возбужденными атомами, которые при излучении теряют энергию, связанную с частотой фотона формулой Бора (14.1.3). Этот процесс может быть как *самопроизвольным* (спонтанным), так и *вынужденным* (индуцированным). Спонтанное излучение происходит без внешнего воздействия на атом и обусловлено только неустойчивостью его возбужденного состояния, из-за которой атом рано или поздно освобождается от энергии возбуждения путем испускания фотона.

Индукцированное излучение вызывается воздействием на атом электромагнитной волны с резонансной частотой, при которой выполняется равенство (14.1.3) для одного из атомных переходов, происходящих с понижением энергии атома. В отличие от спонтанного в каждом акте индуцированного излучения участвуют два фотона. Один из них распространяется от стороннего источника и воздействует на атом, а другой испускается атомом в результате этого воздействия.

Основное свойство индуцированного излучения – точное совпадение для внешнего и испущенного фотонов частоты, фазы, поляризации. То есть эти фотоны *когерентны*.

В обычных условиях атомы вещества распределяются по состояниям под влиянием теплового движения. В этом случае вещество поглощает энергию проходящего через него электромагнитного излучения, никак не усиливая его. Заселенность энергетического уровня с энергией  $E_i$  при температуре  $T$  равна

$$N_i = N_0 e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (14.4.1)$$

Из формулы видно, что с увеличением энергии  $E_i$  заселенность уровня уменьшается. Для того, чтобы получить усиление интенсивности излучения необходимо создать *большую* населенность *более высокого* энергетического уровня. В этом случае вещество *обладает инверсной населённостью*. Для энергий  $E_n$  и  $E_m$  ( $E_n > E_m$ ) получаем условие

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{\frac{(E_n - E_m)}{kT}} > 1.$$

Для теплового равновесия условие

$$e^{\frac{(E_n - E_m)}{kT}} > 1,$$

выполняется только при  $T < 0$  °К, что невозможно. Следовательно, тепловое равновесие должно быть нарушено и индуцированное излучение – это неравновесный процесс.

Чтобы создать состояние с инверсной населенностью необходимо затрачивать энергию на преодоление процессов, восста-

навливающий равновесное распределение населенностей. Такое воздействие на вещество называется *накачкой*.

Принцип усиления света за счет вынужденного излучения был предположен в 1940 г. В. Фабрикантом. Первый лазер (рубиновый) был создан в 1960 г. Т. Мейманом.

Рассмотрим световой способ накачки, который реализуется в рубиновом лазере. Рубин – это окись алюминия  $Al_2O_3$ , где часть ионов Al заменена ионами хрома (Cr). Энергия накачки поступает от ксеновой лампы, работающей в импульсном режиме с длительностью вспышки  $10^{-3}$  с. До вспышки ионы хрома находятся в основном состоянии с энергией  $E_1$ . Под действием вспышки они переходят в возбужденное состояние с энергией  $E_3$ , в котором их время жизни составляет  $10^{-8}$  с. На втором этапе большинство ионов хрома переходят в метастабильное состояние с энергией  $E_2$  без излучения фотонов. В этом состоянии их время жизни составляет  $10^{-3}$  с и происходит накопление на этом уровне большинства ионов хрома – возникает инверсная населенность. На заключительном этапе начинается переход ионов хрома в состояние  $E_1$  с излучением фотонов с длиной волны  $\lambda = 94,3$  нм, которые

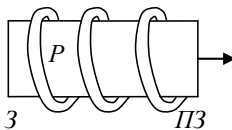


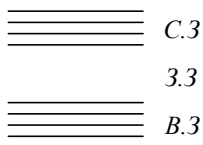
Рис. 14.3.1. Схема рубинового лазера:  
 Р – рубиновый стержень;  
 Л – импульсная лампа;  
 ПЗ – полупрозрачный торец

отражаясь от зеркального и полупрозрачного торцов рубинового стержня, взаимодействуют с большим количеством возбужденных ионов хрома. Число фотонов лавинообразно возрастает и при некоторой интенсивности луч лазера выходит через полупрозрачный торец. Затем цикл повторяется, т. е. лазер работает в импульсном режиме (см. рис. 14.3.1). Внутри кристалла выделяется большое количество тепла, поэтому еще предусмотрена система охлаждения

В 1961 г. был создан лазер на основе гелия и неона, где накачка осуществлялась электрическим разрядом и режим работы был непрерывным. В 1963 г. были созданы первые полупроводниковые лазеры. Мощные лазеры на основе  $CO_2$  применяются для резки и сварки металлов, лазеры с ядерной накачкой – в военных целях.

## 14.5. Электроны в кристаллах. Зонная структура энергетического спектра

Энергетический спектр любой микрочастицы в периодической среде (кристаллах) имеет зонное строение: допустимыми являются энергии внутри определенных интервалов. Промежутки между разрешенными энергиями образуют щели запрещенных энергий.



*Рис. 14.5.1.*  
Схематическое изображение зонной структуры:  
B.3. – валентная зона;  
3.3. – запрещенная зона;  
C.3. – свободная зон

Разрешенные уровни энергий объединяются в **валентную зону** (для металлов – это **зона проводимости**) (см. рис. 14.5.1).

Электроны в кристаллах как частицы с полупростым спином описываются статистикой Ферми (являются фермионами) и заполняют энергетические уровни в соответствии с принципом Паули. Так как состояние каждого электрона определяется только числами  $n$  и  $S$  (орбитального движения нет), то на каждом уровне может находиться только 2 электрона. В классической механике относительная заселенность энергетического уровня определяется из распределения Больцмана

$$f(E_i) = \frac{N_i}{N_0} = e^{-\frac{E_i}{KT}} = \frac{1}{e^{\frac{E_i}{KT}}}$$

В квантовой статистике Ферми относительная заселенность энергетического уровня фермионами

$$f(E_i) = \frac{N_i}{N_0} = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{KT}} + 1}$$

$\mu$  – химический потенциал электронов.

Варианты:

1. При  $T \rightarrow 0$  обозначим  $\mu = E_F$  и положим  $E_i > E_F$ . Тогда  $f(E_i) \rightarrow 0$  и  $N_i \rightarrow 0$ . Это не заселенные энергетические уровни, которые составляют **зону запрещенных энергий**.

2. При  $T \rightarrow 0$ ,  $E_i < E_F$ . Тогда  $f(E_i) \rightarrow 1$  и  $N_i \rightarrow N_0$ . Все эти уровни заполнены электронами (**зона разрешенных энергий**).

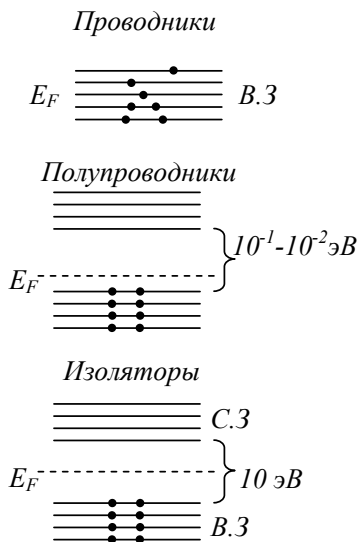


Рис. 14.5.2. Схемы видов кристаллов

на электроны приводит к их переходу между энергетическими уровнями ( $\Delta E = 10^{-22}$  эВ). Электроны могут двигаться, ускоряться, образовывать ток.  $E_F$  находится внутри валентной зоны. Такие кристаллы являются *проводниками* (см. рис. 14.5.2).

2. Валентная заполнена до конца, но ширина запрещенной зоны невелика ( $10^{-1}$ – $10^{-2}$  эВ). Сообщение электронам энергии приводит к их переходу в зону свободных энергий, которая становится зоной проводимости.  $E_F$  – близка к границе валентной зоны. Такие кристаллы являются *полупроводниками*.

3. Электроны заполняют всю валентную зону и ширина запрещенной зоны велика (10 эВ).  $E_F$  лежит внутри запрещенной зоны.

Такие кристаллы являются *изоляторами* (*диэлектриками*) и только сильное электрическое поле способно вызвать переход в свободную зону (*пробой изолятора*).

Сопротивление проводников электрическому току объясняется процессом рассеяния электронов на фонах кристаллической решетки проводника. При снижении температуры чис-

3. При  $E_i = E_F$ ,  $f(E_i) = \frac{1}{2}$ ,  
 $N_i = \frac{N_0}{2}$ . На уровне  $E_F$  нахо-

дится один электрон,  $E_F$  – называется энергией Ферми. Теоретические расчеты дают значение энергии Ферми

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$$

$n$  – плотность электронов в кристаллах.

Рассмотрим возможные типы кристаллов:

1. Валентная зона заполнена не до конца. Тогда она называется *зоной проводимости*, так как даже слабое воздействие

ло фононов уменьшается и сопротивление проводника падает. При сверхнизких температурах наступает низкотемпературная *сверхпроводимость*.

Для некоторых материалов электроны начинают взаимодействовать между собой через положительные ионы в узлах кристаллической решетки. Образуется обменная связь электронов фононами между собой. Энергия связи составляет  $10^{-3} \div 10^{-4}$  эВ. Такая пара образует частицу с нулевым спином, не подчиняющуюся статистике Ферми, Образование пар из двух электронов в кристаллах предсказал Купер в 1956 г. Они были названы «*куперовские пары*».

Связь в куперовских парах является обменной, т. е. носит специфический квантовый характер. опыты подтвердили, что носители заряда в таких веществах имеют заряд  $2e$ .

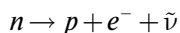
Являясь бозонами эти частицы способны накапливаться в одном энергетическом состоянии, которое не может нарушить тепловое движение ионов. Возникает *высокотемпературная проводимость*.



## Глава 15. Атомное ядро и элементарные частицы

### 15.1. Состав и свойства ядер

Ядро является важнейшей частью атома. В нем сосредоточена почти вся масса атома, хотя ядро занимает очень малый объем в общем объеме атома. Это означает, что ядро состоит из тяжелых частиц, связанных между собой очень сильным взаимодействием. Частицы, входящие в состав ядра получили название *протоны* ( $p$ ) и *нейтроны* ( $n$ ). То, что в составе ядра содержатся протоны и нейтроны было установлено в 1932 г. Д. Иваненко и В. Гейзенбергом. Масса протона составляет 1836 масс электрона, а масса нейтрона – 1838  $m_e$ . Протон заряжен положительным зарядом, равным по величине заряду электрона, нейтрон не имеет электрического заряда. В свободном состоянии нейтрон не стабилен (время жизни – приблизительно 12 мин) и распадается по схеме



( $e^-$  – электрон,  $\bar{\nu}$  – антинейтрино). Разность масс ( $m_n - m_p$ ) превращается в энергию антинейтрино и кинетическую энергию электрона. Поэтому считается, что протон и нейтрон – это два состояния одной частицы – *нуклона*. Так как в ядерной физике исследуются субатомные структуры, введена новая единица длины – один *ферми*  $1 \text{ Ф} = 10^{-15} \text{ м}$ . Это тот предел, который удалось достичь в настоящее время.

Количество протонов в ядре определяет порядковый номер элемента в таблице Д. Менделеева и называется *порядковое число*  $z$ . В настоящее время известны ядра с  $z$  от 1 до 110 и с  $A$  от 1 до 266. Это порядка 1500 ядер, из которых только 300 является стабильными.

Общее число нуклонов в ядре определяет массу и называется *массовое число*  $A$ . Тогда обозначение ядра любого элемента  ${}_z^A X$ , где  $X$  – химический символ элемента. Ядра, имеющие одинаковые  $z$  при разных  $A$  называются *изотопами* (например  ${}_1^1\text{H}$ ,  ${}_1^2\text{H}$ ,  ${}_1^3\text{H}$  – изотопы водорода) ядра, имеющие одинаковое  $A$ , при разных  $z$  называются *изобарами* (например,  ${}_{18}^{40}\text{Ar}$ , и  ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ ).

Ядра с одинаковым количеством нейтронов называются *изотонами*. Например, ядра  ${}^{13}_6\text{C}$  и  ${}^{14}_7\text{N}$  являются изотонами.

Радиус ядра зависит от массового числа и определяется эмпирической формулой

$$R = 1,3A^{\frac{1}{3}}\Phi.$$

Все нуклоны являются фермионами и их спины складываются в результирующий спин ядра

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots & \text{— при нечетном } A \\ I = 0, 1, 2, 3, \dots & \text{— при четном } A \end{cases}.$$

Обычно спин ядра не превышает несколько единиц и для всего атома складывается со спином электронных оболочек.

В отличие от электрического заряда масса ядра не является аддитивной величиной – она всегда меньше суммы масс, составляющих ядро нуклонов. Это изменение массы определяется по формуле

$$\Delta m = [zm_p + (A - z)m_n - m_{\text{я}}],$$

и называется *дефектом массы*. Дефект массы связан с очень сильным взаимодействием нуклонов в ядре, которые удерживает протоны на расстоянии порядка одного ферми несмотря на огромные кулоновские отталкивающие силы. Это взаимодействие определяет *энергию связи* нуклонов в ядре

$$\Delta E = c^2 \Delta m.$$

Энергия связи численно равна работе, которую нужно совершить, чтобы разделить ядро на составляющие нуклоны. При распаде ядра эта энергия выделяется в огромных количествах.

Энергия связи ядра гелия ( $\text{He}$ ):  $\Delta E = 28,4$  Мэв.

Энергия сгорания угля (химической реакции  $\text{C} + 2\text{O} = \text{CO}_2$ ).

$$\Delta E' = 5 \text{ эв}.$$

То есть при распаде 1 кг гелия выделяется такая же энергия, как при сгорании 55 млн кг угля (это 5,5 тыс. т или порядка 30 вагонов угля)

Общее определение: «Энергия связи – это разность между энергиями нуклонов в ядре и их энергий в свободном состоянии».

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, называется *удельной энергией связи*

$$\Delta E_y = \frac{E_y}{A}.$$

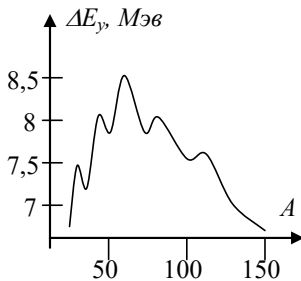


Рис. 15.1.1. Зависимость  $\Delta E_y$  от массового числа  $A$

Из графика зависимости  $\Delta E_y$  от  $A$  (см. рис. 15.1.1) видно, что  $\Delta E_y$  возрастает, достигая максимума при  $A = 56$  (железо), а затем почти равномерно убывает от  $8,8$  Мэв до  $7$  Мэв. Кривая имеет пики для  $z$  (или  $N = A - z$  – числа нейтронов), равного:  $2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  – *магические числа*. Если  $z = N$  имеем *дважды магические числа*:  $2, 8, 20, 82$ .

Дважды магические числа:  $2 - {}^4_2\text{He}$  (гелий),  $8 - {}^{16}_8\text{O}$  (кислород),  $20 - {}^{40}_{20}\text{Ca}$  (кальций),  $82 - {}^{164}_{82}\text{Pb}$  (свинец). Это наиболее устойчивые элементы Вселенной.

Ядра с  $A$  близкими к  $56$  наиболее стабильны. Легким ядрам энергетически выгодно сливаться друг с другом, образуя более тяжелые ядра (синтез), а тяжелым ядрам выгодно делиться (распад). И в том и в другом случае выделяется энергия, которая в первом случае называется *термоядерной*, а во втором – *атомной*.

При синтезе дейтерия с тритием выделяется энергия  $17,6$  Мэв. При распаде  ${}^{235}_{92}\text{U}$  выделяется энергия  $200$  Мэв.

## 15.2. Ядерные силы. Квантовая модель ядра

Нуклоны в ядре связаны силами, которые называются *ядерными*. Огромная энергия связи говорит о очень интенсивном взаимодействии, так как на расстояниях порядка  $1 \text{ Ф}$  кулоновские силы отталкивания огромны. Поэтому ядерное взаимодействие получило *сильное взаимодействие*.

В современной физике различают четыре вида взаимодействия:

1. Гравитационное (это взаимодействие между всеми телами, обладающими массами покоя или движения).

2. Электромагнитное (это взаимодействие между покоящимися или движущимися заряженными телами).

3. Сильное (это взаимодействие между нуклонами в ядре или между ускоренными до тех же энергий частицами).

4. Слабое (это взаимодействие между нуклонами в процессе их превращений или между элементарными частицами).

Основные свойства ядерных сил:

1. Ядерные силы являются короткодействующими (при  $r \geq 1$  Ф это силы притяжения, при  $r < 1$  Ф – силы отталкивания).

2. Ядерные силы имеют *свойство насыщения* (каждый нуклон взаимодействует только с окружающими его нуклонами, как молекула в жидкости взаимодействует только с окружающими молекулами).

3. Ядерные силы *не обладают центральной симметрией* (сила, действующая между двумя нуклонами, не направлена по прямой, соединяющей нуклоны).

4. Ядерные силы обладают *изотопической инвариантностью*, или *зарядовой симметрией* (силы взаимодействия  $p$ - $p$ ,  $n$ - $n$ ,  $p$ - $n$  одинаковы).

5. Ядерные силы зависят от *взаимной ориентации спинов* взаимодействующих нуклонов (например, дейтрон образуется только при параллельных спинах  $p$  и  $n$ ).

6. Ядерные силы являются *обменными* (нуклоны взаимодействуют через поле ядерных сил путем обмена *мезонами* – квантами этого поля).

Каждому виду поля соответствуют кванты этого поля, которыми обмениваются тела при взаимодействии.

Кванты гравитационного поля – *гравитоны*.

Кванты электромагнитного поля – *фотоны*.

Кванты поля ядерных сил – *мезоны*.

Кванты поля кварковых сил – *глюоны*.

Обменное взаимодействие введено квантовой механикой, где существует неопределенность *энергия – время*:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar . \quad (15.2.1)$$

Принимая  $\Delta E = m_0 c^2$  и  $\Delta t = \frac{r}{c}$ , где  $r$  – радиус действия поля, получаем

$$r = c \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{m_0 c}. \quad (15.2.2)$$

Эта формула дает для электромагнитного поля  $r = \infty$  (так как масса покоя фотона  $m_0 = 0$ ).

Для поля ядерных сил для известного размера ядра  $r$  получаем массу кванта поля (мезона)

$$m_0 = \frac{\hbar}{r c} \approx 270 m_e.$$

Обнаруженные в космических лучах частицы с  $m_0 = 273 m_e$  были названы  $\pi$  – мезонами (*пионами*). Обнаружен  $\pi^+$  – положительный пион,  $\pi^-$  – отрицательный пион,  $\pi^0$  – нейтральный пион.

Частицы, испускание и поглощение которых происходит с кажущимся нарушением закона сохранения энергии, называется *виртуальным*. При сближении двух нуклонов до соприкосновения их *мезонных шуб* создаются условия для обмена пионами.

Схема обменного взаимодействия нуклонов такова:

$$\begin{aligned} p &\leftrightarrow n + \pi^+; & p &\leftrightarrow p + \pi^0 \\ n &\leftrightarrow p + \pi^-; & n &\leftrightarrow n + \pi^0. \end{aligned} \quad (15.2.3)$$

Время жизни пиона можно определить из соотношения неопределенностей (13.2.1)

$$\tau_\pi = \frac{\hbar}{m_0 c^2}.$$

Оно составляет  $10^{-8}$  для  $\pi^+$  и  $\pi^-$  и  $10^{-16}$  с для  $\pi^0$ . Испущенный нуклоном пион может удалиться от него не более чем на  $r$  из (15.2.2). Если поблизости нет других нуклонов, то все испускаемые нуклоном пионы поглощаются этим – же нуклоном. Поэтому одиночный нуклон окружен *мезонной шубой*.

Атомное ядро является квантовой системой многих сильно взаимодействующих частиц. Задача многих тел в квантовой те-

ории очень трудна и громоздка, поэтому в теории атомного ядра очень важное место занимают модели. Разработано несколько моделей ядра: *капельная (гидродинамическая), оболочная, обобщенная, статическая.*

Основной и самой реалистической является оболочная модель, разработанная в 1950 г. М. Гепперт-Майер и И. Йенсоном. Каждый нуклон рассматривается как движущийся в самосогласованном поле, создаваемом остальными нуклонами. То есть налицо аналогия с построением электронных оболочек атома. Основные положения модели:

1. Каждый нуклон описывается волновой функцией  $\psi_{n,l,S}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $S = \pm \frac{1}{2}$  – квантовые числа.

2. Существует две системы нуклонных состояний – для протонов и нейтронов, которые заполняются независимо друг от друга.

3. Момент импульса нуклона  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{S}$  представляется очень сильным спин – орбитальным взаимодействием. Поэтому каждый уровень с  $l > 0$  расщепляется на два подуровня  $\vec{j} = l \pm \frac{1}{2}$ .

4. Ядра, имеющие заполненные нуклонные оболочки обладают *повышенной устойчивостью.*

5. Заполнение энергетических уровней (нуклонных оболочек) идет в соответствии с *принципом Паули.*

В соответствии с принципом Паули для оболочной модели каждому  $n$  соответствует  $(n - 1)$  значений  $l$ , а каждому  $l$  соответствует  $2(l + 1)$  значений  $j$ .

Состояния нуклонов обозначается так же, как у электронов  $l = 0, 1, 2, 3, 4$  ( $s, p, d, f, g$  – состояния).

Обозначение нуклонной конфигурации  $nl_j$ :  $n$  – число,  $l$  – буква,  $j = l \pm 1/2$ .

В ядре каждому  $n$  соответствует  $(n - 1)$  значений  $l$ , а каждому  $l - 2(l + 1)$  значений  $j$ . Обозначение нуклоновых состояний немного отличается от электронных:  $n$  – число,  $l$  – буква,  $j$  – нижний индекс. Например:  $1S_{\frac{1}{2}}$ , где  $j = (l + S) = (0 + 1/2)$ ,  $2P_{\frac{3}{2}}$   $j = 1 + 1/2 = 3/2$ ,  $3d_{\frac{5}{2}}$   $j = 2 + 1/2 = 5/2$  (см. табл. 15.2.1).

Таблица 15.2.1

Номер оболочки	Уровни	Нуклонная конфигурация	Число нуклонов в ядре $2(l + 1)$
1	$1S$	$1S_{1/2}$	2
2	$2S$ $2p$	$2S_{1/2}$ $2p_{3/2}$	$\left. \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\} 6$
3	$3S$ $3p$ $3d$	$3S_{1/2}$ $3p_{3/2}$ $3d_{5/2}$	$\left. \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \right\} 12$

Из таблицы следует, что ядра с числом протонов (или нейтронов) 2, 8(2 + 6), 20(2 + 6 + 12), 28, 50, ... являются ядрами с заполненными нуклонными оболочками, наиболее устойчивы и распространены во Вселенной. Это и есть *магические числа*.

### 15.3. Радиоактивные превращения ядер

Радиоактивность заключается в *самопроизвольном* превращении одних ядер в другие, сопровождающимся испусканием частиц и квантов энергии.

*Естественная* радиоактивность была открыта в 1896 г. А. Беккерелем и исследована П. Кюри и М. Кюри.

*Искусственная* радиоактивность синтезируемых ядер открыта в 1936 г. Ф. Жолио Кюри.

Как всякий квантовый процесс, радиоактивность – явление статистическое и одинаковые ядра распадаются за разные времена. Поэтому определяются только средние параметры большого количества ядер статическими методами.

Если обозначить  $\lambda$  – вероятность радиоактивного превращения ядра в единицу времени, то приращение числа ядер за время  $dt$  равно

$$dN = -N\lambda dt, \quad (15.3.1)$$

где  $N$  – число ядер в момент  $t$ , знак минус указывает, что число нераспавшихся ядер убывает. Изменение числа ядер со временем найдем, разделяя в (15.3.1) переменные и интегрируя

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

$N_0$  – число ядер в момент времени  $t = 0$ .

Интегрирование дает

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \quad \text{или} \quad N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (15.3.2)$$

Формула показывает закон убывания ядер при радиоактивном распаде и называется *основным законом радиоактивного распада*.  $\lambda$  получила название *постоянная распада*. Она имеет размерность  $\text{с}^{-1}$ .

Величина,  $\tau = 1/\lambda$  обратная постоянной распада получила название *среднее время жизни* радиоактивного ядра. К радиоактивным относятся все ядра с временами жизни от  $10^{-9}$  до  $10^{22}$  с.

С помощью (15.3.2) находится время, за которое распадается половина исходного количества ядер. Так как  $N = \frac{1}{2} N_0$  и  $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$ , получаем

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (15.3.3)$$

$T$  получило название *период полураспада* радиоактивного изотопа.

Для всех изученных в настоящее время изотопов период полураспада изменяется в диапазоне от  $3 \cdot 10^{-7}$  с до  $5 \cdot 10^{15}$  лет.

Число распадов в единицу времени называется *активностью* изотопа. Так как  $dN' = -dN$  – число распавшихся ядер за время  $dt$ , то активность

$$a = \frac{dN'}{dt} = \frac{\lambda N dt}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t},$$

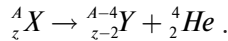
обозначая  $\lambda N_0 = a_0$  – активность в момент  $t = 0$ , получаем изменение активности со временем

$$a = a_0 e^{-\lambda t}. \quad (15.3.4)$$



В системе СИ единицей активности является один распад в секунду, получивший название *Беккерель* (Бк). Так же применяется внесистемная единица *Кюри* (Ки).  $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$  и внесистемная единица *Резерфорд* (Рд)  $1 \text{ Рд} = 10^6 \text{ Бк}$ .

Основными типами радиоактивности являются  $\alpha$ -распад,  $\beta$ -распад, протонная радиоактивность.  $\alpha$ -распад состоит в испускании ядром  $\alpha$ -частицы (ядра гелия  ${}^4_2\text{He}$ ) и записывается



$\alpha$  - частицы испускают только тяжелые ядра с  $z \geq 82$ .

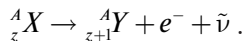
Пример  $\alpha$ -распада – превращение ядра урана  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , которое превращается в ядро тория  ${}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He}$ .

Крайним в ряду  $\alpha$  радиоактивных ядер является свинец  ${}^{204}_{82}\text{Pb}$ .  ${}^A_z X$  – материнское ядро,  ${}^{A-4}_{z-2} Y$  – дочернее ядро.  $\alpha$ -частица – группа из двух протонов и двух нейтронов – самое устойчивое ядро, так как характеризуется дважды магическими числами.  $\alpha$ -частицы обладают высокими скоростями и энергиями (порядка  $10^6$  эв). Возбужденное дочернее ядро при переходе в основное состояние испускает  $p$ ,  $n$ ,  $\alpha$ -частицу,  $\gamma$ -кванты, но чаще всего отдает энергию электронам близлежащих оболочек, что приводит к ионизации атома и *характеристическому* рентгеновскому излучению. Образование  $\alpha$ -частиц происходит в самом процессе радиоактивного распада, так как группа  $2p + 2n$  наиболее устойчива и слабо взаимодействует с другими нуклонами.

Поток  $\alpha$  – частиц представляет крайне опасное ионизирующее излучение. Энергии 1-й  $\alpha$ -частицы хватает на ионизацию 100000 атомов вещества.  $\alpha$ -распад в квантовой механике – это туннельный эффект, т. к. энергия  $\sim 6$  Мэв в 2 раза меньше энергии связи ядра.

Под понятием  $\beta$ -распада объединяются три вида превращений: *электронный  $\beta$ -распад*, *позитронный  $\beta$ -распад*, *E-захват*.

1. Электронный  $\beta$ -распад сопровождается испусканием ядром электронов. Его схема:



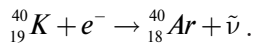
Пример электронного  $\beta$ -распада – превращение тория в проактиний  ${}_{90}^{234}\text{Th} \rightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + e^{-} + \tilde{\nu}$ ,  $\tilde{\nu}$  – *антинейтрино*.

2. Позитронный  $\beta$ -распад заключается в испускании ядром позитрона (частицы с массой электрона и положительным единичным зарядом). Его схема:  ${}_z^AX \rightarrow {}_{z-1}^AY + e^{+} + \tilde{\nu}$ .

Пример позитронного  $\beta$ -распада – превращение изотопа азота в изотоп углерода  ${}_7^{13}\text{N} \rightarrow {}_6^{13}\text{C} + e^{+} + \nu$ ,  $\nu$  – *нейтрино*.

3.  $E$ -захват происходит, когда превращающееся ядро захватывает электрон из ближайших к нему оболочек. Его схема:  ${}_z^AX + e^{-} \rightarrow {}_{z-1}^AY + \tilde{\nu}$ .

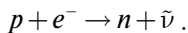
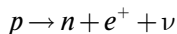
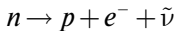
Пример  $E$ -захвата – превращение изотопа калия в изотоп аргона



Так как электроны и позитроны не содержатся в ядре, они возникают в процессе радиоактивного превращения в результате *слабого взаимодействия* нуклонов.

Отличительной чертой  $\beta$ -распада является его внутринуclidонное, а не внутриядерное происхождение. В процессе  $\beta$ -распада изменяется зарядовое состояние одного из нуклонов.

Схемы *слабого взаимодействия* нуклонов:



Излучение энергетического спектра  $\beta$ -частиц привело В. Паули в 1930 г. к предсказанию существования частицы, не имеющей заряда и массы покоя. Эта частица обеспечивала закон сохранения энергии при  $\beta$ -распаде и получила название *нейтрино* (маленький нейтрон).

Впервые нейтрино наблюдалось Ф. Райнесом и К. Коуэном в 1953 г. в ядерном реакторе. В Иркутске создана установка регистрации нейтрино в глубинах о. Байкал по их взаимодействию с атомами вещества в условиях большой плотности (вода) и уникальной прозрачности.

Все виды радиоактивных превращений сопровождаются испусканием  $\gamma$ -лучей (электромагнитных квантов высокой энергии), которые относятся к *ионизирующим излучениям*.  $\gamma$ -кванты образуются при переходе нуклонов из одного состояния в другое и полностью объясняются оболочечной моделью ядра.

## 15.4. Ядерные реакции

В отличие от радиоактивного превращения ядерные реакции не являются самопроизвольными. **Ядерной реакцией называется превращение ядер в процессе интенсивного взаимодействия с элементарными частицами или другими ядрами.** Обычная схема, в которой при взаимодействии частицы  $a$  с ядром  $X$  образуется ядро  $Y$  и частица  $b$  записывается



Иногда ядерная реакция идет в два этапа с образованием составного или компаунд-ядра:



частицы  $a$  и  $b$  – это протоны, нейтроны,  $\alpha$ -частицы,  $\gamma$ -кванты,  $P$  – компаунд-ядро. Такой механизм протекания реакций был предсказан Н. Бором в 1936 г.

Ядерные реакции, идущие с поглощением энергии называются *эндотермическими*, а с выделением энергии – *экзотермическими*.

Классификация ядерных реакций может быть:

1. По энергии вызывающих реакцию частиц.
2. По роду участвующих в реакции частиц.
3. По роду участвующих в реакции ядер.
4. По характеру ядерных превращений.

По первой классификации все реакции делятся на реакции при малых энергиях ( $1 \div 10$  эВ), реакции на средних энергиях ( $1 \div 10$  МэВ) и реакции на высоких энергиях ( $10^2 \div 10^3$  МэВ). Последний класс реакций наблюдается для частиц, ускоренных в мощных ускорителях.

По второй классификации существует три класса:

1. Реакции под действием нейтронов.
2. Реакции под действием заряженных частиц.

### 3. Реакции под действием $\gamma$ -квантов.

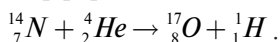
По роду участвующих в реакции ядер существуют реакции на легких ядрах ( $A < 50$ ), на средних ядрах ( $50 < A < 100$ ) и тяжелых ядрах ( $A > 100$ ).

По характеру ядерных превращений различают пять видов ядерных реакций:

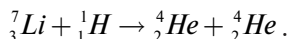
1. Кулоновское возбуждение.
2. Реакция срыва.
3. Радиационный захват.
4. Реакция деления ядер.
5. Реакция синтеза ядер.

Эпоха ядерных реакций началась в 1919 г., когда Резерфорд, облучая атмосферный азот  $\alpha$ -частицами получил изотоп кислорода и водород

*Схема реакции Резерфорда:*

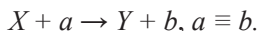


Вторую ядерную реакцию наблюдали Уолтон и Кокрофт в 1932 г.:



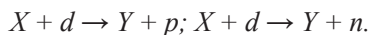
В этом эксперименте из щелочного металла лития был получен гелий.

*Кулоновское возбуждение* – это реакция под действием заряженных частиц, которые из-за малой энергии проникают в ядро благодаря туннельному эффекту. Для малых энергий частиц получается *рассеяние* и реакция идет по схеме



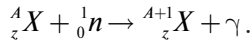
В области средних энергий идут реакции типа  $X + p \rightarrow Y + n$ ;  $X + \alpha \rightarrow Y + p$ ; ...

*Реакции срыва* – это реакции под действием дейтронов  $d ({}^2_1H)$ , в результате которой ядро испускает протон или нейтрон, направление движения которых совпадает с направлением движения дейтронов. Происходит как бы «срыв» с ядра нуклона:

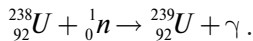


Обратной реакции срыва является реакция подхвата, когда налетевший нуклон ( $P$  или  $n$ ) откалывает от ядра один из нуклонов ( $P$  или  $n$ ) и превращается в дейтон.

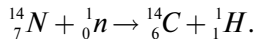
*Радиационный захват* – это реакция под действием на ядро нейтронов (*тепловых*). В результате ядро возбуждается, образуя изотоп того же элемента. При переходе в основное состояние оно испускает  $\gamma$ -квант. Схема реакции:



Пример: радиационный захват нейтрона изотопом урана:



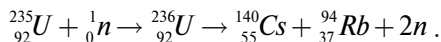
В атмосфере под действием нейтронов, полученных из космического излучения, постоянно идет реакция



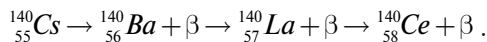
Изотоп  ${}^{14}_6C$  углерода  $\beta$  – радиоактивен с периодом полураспада  $T = 5600$  лет. Он называется *радиоуглеродом* и усваивается растениями в процессе фотосинтеза, а через растение – животными и человеком. При жизни в организме и растениях поддерживается постоянная концентрация радиоуглерода с  $a = 14$  Бк. После смерти организма концентрация  ${}^{14}_6C$  убывает по закону радиоактивного распада, и, измеряя остаток  ${}^{14}_6C$ , можно определить время жизни (дату смерти) организма. На этом основан *радиоуглеродный метод* исследования останков в археологии.

*Реакция деления* возможных только для тяжелых ядер с  $A > 200$ , характеризующихся неустойчивостью и способных делиться на части (*осколки*) при взаимодействии с нейтронами даже тепловых энергий. Известны примерно 80 вариантов деления ядер, при которых энергия связи выделяется в виде световой, тепловой энергии. Осколки перегружены нейтронами и переходят в основное состояние через ряд  $\beta$ -распадов.

*Типичная реакция деления урана:*



Очень опасный радиоактивный элемент цезий испытывает ряд радиоактивных превращений:



Конечный элемент церий – устойчив. Кроме урана при облучении нейтронами делятся торий ( ${}_{90}\text{Th}$ ), протактиний ( ${}_{91}\text{Pa}$ ) и плутоний ( ${}_{94}\text{Pu}$ ). При делении одного ядра испускается несколько нейтронов, которые могут вызвать деление других ядер. Если число делящихся ядер возрастает в геометрической прогрессии, реакция носит взрывной характер и называется *цепной*. Такая реакция реализована в атомных бомбах, где при некоторой массе  $m_k$  (*критической*), нейтроны не успевают покинуть делящийся объем.

Природный уран содержит 99,3%  ${}_{92}^{238}\text{U}$  и только 0,7%  ${}_{92}^{235}\text{U}$ , который извлекается при обогащении.

С созданием оболочек, отражающих нейтроны обратно в вещество, критическая масса начала уменьшаться. Появились ядерные артиллерийские снаряды, ядерные чемоданчики и другие компактные устройства.

В мирных целях реакции деления используются на атомных электростанциях, в двигателях ледоколов и спутников, реакторах для производства ядерного топлива. На атомных электростанциях используется обогащенный уран, а в качестве замедлителей нейтронов сначала использовалась *тяжелая вода* (где водород заменен дейтерием), а в настоящее время – графитовые стержни. Энергия, выделяющаяся при распаде, передается теплоносителю, который превращает воду в пар, приводящий в движение турбины электрических генераторов.

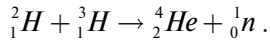
Первая атомная электростанция была построена в 1954 г. в СССР. Это Белоярская АЭС мощностью 5 МВт.

*Реакция синтеза* (слияние двух легких ядер в одно ядро) идут с выделением огромного количества энергии, что дало им название – *термоядерные*. Для того, чтобы началась реакция синтеза необходимо затратить большую энергию при сближении ядер с одинаковыми зарядами, когда кулоновские силы отталкивания становятся огромными. То есть, термоядерную реакцию нужно «зажечь», после чего она поддерживает себя сама.

Для того, чтобы соединились изотопы атома водорода, необходимо иметь температуру порядка 10 млн К° и давление в десятки тысяч атмосфер. Такие условия на Земле создать трудно,

но они возникают при взрыве атомной бомбы. Поэтому первое применение реакции синтеза – термоядерная бомба, в состав которой входит атомная бомба.

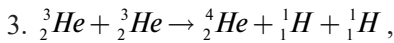
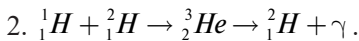
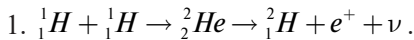
Типичная реакция синтеза – соединение двух изотопов водорода – дейтерия и трития:



Эта реакция была реализована в *водородной* бомбе.

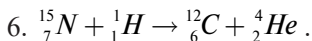
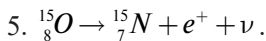
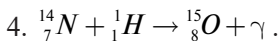
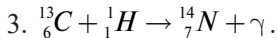
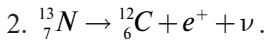
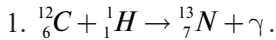
Работа по созданию *управляемых* термоядерных реакций были начаты А. Д. Сахаровым и И. Е. Таммом, которые предложили удержание горячей *плазмы* с необходимыми параметрами температуры в магнитном поле. Работа завершилась в 90-е гг. XX столетия созданием полупромышленного реактора «Токомак-15».

Реакции синтеза являются *составной частью* энергии звезд. На звездах идет процесс выгорания легких ядер (водорода) и образования устойчивого гелия. Для звезд разного уровня существуют разные циклы реакций синтеза в зависимости от возраста звезды. На стареющих звездах (в том числе на Солнце) идет *протон – протонный* цикл в три этапа:



и цикл повторяется с участием  ${}^1_1\text{H}$  и  ${}^1_1\text{H}$ .

На горячих молодых звездах идет *углеродно-азотный* цикл, содержащий следующие этапы:



Итогом углеродного цикла является исчезновение четырех протонов (водорода) и образование одного ядра гелия. Количество ядер углерода при этом остается неизменным – эти ядра участвуют в реакции в роли катализатора.

Использование термоядерных реакций даст человечеству практически неисчерпаемый источник энергии, так как запасы легких ядер практически неограничены.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования в области *низкотемпературного* синтеза, когда слияние ядер может произойти вследствие *туннельного эффекта*.

### 15.5. Элементарные частицы

Представление об элементарных частицах возникло с открытием дискретного строения материй на микроскопическом уровне. Согласно этому представлению материю невозможно дробить беспредельно.

Открытие частиц шло в порядке уменьшения их стабильности:

1897 г. – электрон.

1919 г. – протон.

1932 г. – нейтрон, позитрон.

1936 г. – мюоны.

1947 г. – пионы.

1950-е гг. – К-мезоны,  $\lambda$ -гипероны.

1960-е гг. – античастицы, резонансы.

1974 г. – очарованные частицы.

1980–1990-е гг. – кварки.

Существуют микроскопические порции материи, которые не имеют *внутренней структуры*. Эти предельно малые составляющие материи были названы *элементарными частицами*. У подавляющего большинства частиц, которые недавно считались элементарными, обнаружена внутренняя структура. К их числу относятся и нуклоны. Тем не менее, за этими частицами сохранилось название *элементарных*. В настоящее время открыто более 350 частиц, большинство из которых нестабильны.

Источниками получения частиц вначале были космические лучи, которые называются *первичными* за пределами атмосферы



(состоят в основном из протонов) и *вторичными* после взаимодействия с атомами атмосферы (состоят из *жесткой* компоненты – пионы, мюоны и *мягкой* компоненты – электронов, позитронов, фотонов). С 1952 г. (в США запущен первый синхрофазотрон) источником открытия новых частиц стали мощные ускорители.

К методам регистрации и определения характеристик частиц относятся:

1. Сцинтилляционные счетчики, в которых частицы вызывают свечение экранов.

2. Ионизационные счетчики (счетчики Гейгера) в которых движущиеся частицы вызывают ионизацию газа.

3. Трековые приборы (исковые, пузырьковые, камера Вильсона), в которых частицы образуют видимые траектории.

4. Фотоэмульсионный метод, где частицы в слоях фотопластинок образуют видимые изображения их движения и распада.

Все частицы могут быть классифицированы по спину, по массе, по характеру взаимодействия с другими частицами. По спину все частицы делятся на *фермионы* (частицы с полуцелым спином) и *бозоны* (частицы с целым спином). По массе частицы делятся на *лептоны* (легкие), *мезоны* (средние) и *барионы* (тяжелые частицы). По характеру взаимодействия частицы разделены на три класса: *фотоны* (участвуют в электромагнитных взаимодействиях), *лептоны* (участвуют в слабых взаимодействиях) и *адроны* (участвуют в сильных взаимодействиях).

Частицы, участвующие в гравитационных взаимодействиях называются *гравитоны*. Они пока не обнаружены.

Приведенная табл. 15.5.1 включает в себя все три классификации.

Таблица 15.5.1

<i>Класс</i>	<i>Название</i>	<i>Масса в <math>m_e</math></i>	<i>Спин</i>
Фотоны	$\gamma$ – кванты, фотоны	0	1
Лептоны	$\nu$ , $\bar{\nu}$ – нейтрино, антинейтрино	0	1/2
	$e^-$ , $e^+$ – электрон, позитрон	1	1/2
	$M^\pm$ , $M^\mp$ – мюоны	207	1/2

Класс		Название	Масса в те	Спин	
Адроны	Мезоны	$\pi^+, \pi^-, \pi^0$ – пионы	273,264	0	
		$K^+, K^-$ – каоны	967	0	
		$K^0, \tilde{K}^0$ – $K$ – ноль мезоны	974	0	
		$D^+, D^-$ – $D$ – мезоны	934	0	
	Барионы	Нуклоны	$P, \tilde{P}$ – протон, антипротон	1836	1/2
			$n, \tilde{n}$ – нейтрон, антинейтрон	1638	1/2
	Гипероны	$\Lambda^0, \tilde{\Lambda}^0$ – $\lambda$ -гипероны	2182	1/2	
		$\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$ – сиг-ма-гипероны	2327	1/2	
		...	...	...	

В 1980-х гг. обнаружена внутренняя структура адронов. Они состоят из *кварков*. Теоретически кварковую модель разработали в 1960-х гг. М. Гелл-Манн, Дж. Цвейг. В настоящее время известно 6 типов кварков. Каждый мезон состоит из пары кварк-антикварк, каждый барион состоит из трех кварков. Каждый тип кварка называется *ароматом*. Таблица 15.5.2 показывает основные свойства кварков. Вначале полагали существование только двух типов кварков  $U$  – верхний и  $d$  – нижний. Из них состоят нуклоны.

Таблица 15.5.2

Аромат	Спин	Электронный заряд ( $e$ )	Красота	Странность	Шарм	Истинность
$u$	1/2	2/3	0	0	0	0
$d$	1/2	-1/3	0	0	0	0
$s$	1/2	-1/3	0	1	0	0
$c$	1/2	2/3	0	0	1	0
$b$	1/2	-1/3	1	0	0	0
$t$	1/2	+2/3	0	0	0	1

Своеобразные термины кварковой модели:

1. Кварк  $b$  – носитель нового квантового числа, которые называются **красотой**. Поэтому  $b$  – **красивый** кварк.

2. Кварк  $s$  – носитель **странности** (**странный** кварк).

3. Кварк  $c$  – носитель **шарма** (**очарованный** кварк).

4. Кварк  $t$  – носитель **истины** (**истинный** кварк).

Все кварки имеют дробный электрический заряд, что в корне меняет представление об элементарном заряде.

Антикварки отличаются от кварков красотой, электронным зарядом. Кварки взаимодействуют между собой путем обмена квантами поля кварковых сил, которые получили название глюоны.

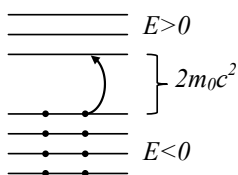
Кварковый состав некоторых частиц

$$P^+(u, \bar{d}); P^-(\bar{u}, d); P(u, u, d); n(u, d, d); K^+(u, \bar{s}); \bar{K}(d, d, d).$$

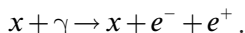
Все кварки являются фермионами, поэтому для соблюдения принципа Паули выдвинуто предположение о существовании у кварков внутренней степени свободы, чтобы кварки могли отличаться друг от друга. Эта степень свободы получила название – цвет. Цвет кварка принимает три значения – красное, желтое, голубое, смесь которых бесцветна. Отсюда – принцип бесцветности адронов

Универсальным свойством элементарных частиц является существование античастиц. Античастица отличается от частицы знаками всех величин, характеризующих взаимодействия (заряд, странность, шарм ...). Существование античастиц объясняется в релятивистской квантовой теории. Для частиц с высокими скоростями, когда масса зависит от скорости уравнение Шредингера не инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца. В 1928 г. П. Дирак записал релятивистское волновое уравнение, из которого следует, что у волновой функции, описывающей движение частицы есть функция-двойник. Эта функция-двойник описывает ту же частицу, для которой время течет в обратном направлении. Также из уравнения Дирака следует, что частица может обладать не только положительной, но и отрицательной энергией. Наименьшая положительная энергия  $E_{\min} = m_0 c^2$ , наибольшая отрицательная энергия  $E_{\min} = -m_0 c^2$ . Частица с отрицательной

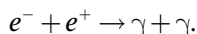
энергией в соответствии с формулой Эйнштейна  $E = mc^2$  должна иметь отрицательную массу. Интервал  $-m_0c^2 < E < m_0c^2$  является зоной запрещенных энергий. Эти выводы в корне меняли представление о вакууме и привели к выводу о существовании античастиц. Поясним это на примере электронов. Согласно теории Дирака вакуум – это состояние пространства, в котором уровни с отрицательными энергиями полностью заселены частицами, а все уровни с положительными энергиями свободны. Переходы в зоне отрицательных энергий невозможны, поэтому частицы не ускоряются, не излучают и вообще никак себя не обнаруживают. Чтобы попасть в зону положительных энергий, частице нужно



преодолеть «запрещенную зону»  $\Delta E = 2m_0c^2$ , которая составляет для электрона 1,02 Мэв (см. рис. 15.4.1). Получив эту энергию электрон переходит в зону положительных энергий, где обнаруживает себя меняя энергию и взаимодействуя с другими частицами. В зоне отрицательных энергий отсутствие частицы с *отрицательным* зарядом и *отрицательной* массой воспринимается как присутствие *положительного* заряда с *положительной* массой (образуется «дырка» по аналогии с полупроводниками). Эту «дырку» Дирак назвал *позитроном*. В 1932 г. позитрон был обнаружен в космических лучах. Таким образом, в вакууме электрон всегда образуется в паре с позитроном, а энергия 1,02 Мэв вполне достижима  $\gamma$ -квантами. Происходит *процесс рождения частиц из вакуума* при взаимодействии  $\gamma$ -квантов с ядром элемента  $x$



По аналогии с полупроводниками, когда электрон встречается с позитроном (дыркой), он занимает это вакантное место и исчезает из пространства. Энергия  $\Delta E = 2m_0c^2$  выделяется в виде вспышки (излучение фотонов или  $\gamma$ -квантов)



Этот процесс называется *аннигиляцией*.

Процессы с участием античастиц протекают точно так же, как зеркальные изображения этих процессов, но происходящих с участием частиц. Например, электронный  $\beta$ -распад атомного ядра протекает так же, как зеркальное изображение позитронного  $\beta$ -распада антиядра.

### **Задания для самостоятельной работы и задачи к главам 12–15**

#### *Зачётные требования*

1. Знать основные характеристики и законы теплового излучения тел.
2. Объяснить смысл квантовой гипотезы Планка и её значения для преодоления кризиса классической физики.
3. Дать объяснения законам и эффектам, подтверждающим квантовую природу электромагнитного излучения.
4. Сформулировать принцип неопределённости, гипотезу де Бройля и объяснить корпускулярно-волновой дуализм в механике микромира.
5. Знать определение волновой функции, её свойств и принципа суперпозиции состояний.
6. Пояснить общий смысл и знать конкретный вид квантово-механических операторов.
7. Знать общий вид уравнения Шредингера и его решения для различных видов движения частиц.
8. Дать объяснение планетарной модели атома и сформулировать постулаты Боровской теории.
9. Знать основные положения квантово-механической модели атома и значения всех квантовых чисел.
10. Сформулировать принцип Паули и пояснить порядок заполнения электронных оболочек для объяснения структуры таблицы элементов Менделеева.
11. Знать механизм вынужденного излучения и принцип работы лазеров, а также поведение электронов в различных типах кристаллов.
12. Пояснить основные свойства, структуру и состав атомных ядер, знать свойства ядерных сил.

13. Дать объяснение основных положений о свойствах различных моделей атомного ядра.
14. Знать основные закономерности радиоактивных превращений атомных ядер.
15. Дать классификацию и примеры ядерных реакций.
16. Знать основные свойства и классификацию элементарных частиц, свойства и источники античастиц.
17. Пояснить основные положения кварковой теории адронов.

### Зачётные задания

Выполнить задания, данные в ниже, в соответствии со своим вариантом.

#### Задача 1.

Внешний фотоэффект – это явление испускания электронов металлами под действием фотонов электромагнитного излучения. Основные характеристики светового излучения  $\lambda$  – длина волны и частота  $\nu$ , характеристики фотоэлектронов – заряд  $e$ , масса  $m$  и скорость вылета из металла  $v$ . Для металлов основной характеристикой является работа выхода  $A$ .

Записать уравнение Эйнштейна для фотоэффекта и найти неизвестные параметры ( $\lambda_k$  и  $\nu_k$  – красная граница фотоэффекта).

Значения параметров приведены в табл. 15.6.1

Таблица 15.6.1

№ варианта	Металл	$A$ , эВ	$\lambda$ , нм	$\nu$ , с-1	$v$ , м/с	$M$ , кг	$\lambda k$ , нм	$\nu k$ , с-1
1	Цезий	1,89	550	?	?	$9,31 \cdot 10^{-31}$	?	?
2	Калий	?	480	?	?	$9,31 \cdot 10^{-31}$	?	?
3	Неизвестный	4,62	?	?	$6 \cdot 10^5$	$9,31 \cdot 10^{-31}$	?	?
4	Натрий	?	450	?	$5 \cdot 10^4$	?	?	?
5	Барий	?	500	?	?	$9,31 \cdot 10^{-31}$	?	?
6	Цинк	?	250	?	?	$9,31 \cdot 10^{-31}$	?	?
7	Неизвестный	3,74	?	?	?	$9,31 \cdot 10^{-31}$	322	?
8	Литий	?	?	?	$8 \cdot 10^5$	$9,31 \cdot 10^{-31}$	?	?
9	Неизвестный	4,84	350	?	$4 \cdot 10^6$	?	?	?
10	Золото	-	-	-	-	-	?	?

*Задача 2.*

Состояние электрона в атоме определяется набором четырех квантовых чисел  $n, l, m, s$ . В соответствии с их значениями записывается электронная конфигурация атома. Определить неизвестные параметры.

Значения параметров приведены в табл. 15.6.2

*Таблица 15.6.2*

<i>№ варианта</i>	$n$	$l$	$m$	<i>Электронная конфигурация</i>	<i>Элемент</i>
1	1, 2	?	?	?	${}_{6}^{12}\text{C}$
2	?	0, 1	?	$1S_2 2S_2 2P_5$	?
3	?	?	?	?	${}_{2}^4\text{He}$
4	1, 2, 3	?	?	$1S_2 2S_2 2P_6 3S_2 3P_3$	?
5	?	?	0, $\pm 1$	?	${}_{9}^{19}\text{F}$
6	1, 2, 3	0, 1, 2	?	?	${}_{16}^{32}\text{S}$
7	?	0, 1, 2	?	$1S_2 2S_2 2P_6 3S_2 3P_1$	?
8	?	0, 1, 2, 3	?	$1S_2 2S_2 2P_6 3S_2 3P_6 4S$	?
9	1, 2	?	?	$1S_2 2S_2 2P$	?
10	?	?	0, $\pm 1$ , $\pm 2$	?	${}_{14}^{28}\text{Si}$

*Задача 3.*

Закон радиоактивного распада показывает убывание нераспавшихся ядер со временем. Основные характеристики процесса: постоянная распада  $\lambda$ , период полураспада  $T$ , исходное число ядер  $N_0$ , среднее время жизни изотопа  $\tau$ , активность  $a$ .

Определить неизвестные параметры.

Значения параметров приведены в табл. 15.6.3.

Таблица 15.6.3

№ вар.	$N_0$	$\lambda, \text{с-л}$	$\tau, \text{с}$	$T, \text{с}$	$t, \text{с}$	$N,$	$a_\phi, \text{Бк}$	Элемент
1	$10^5$	?	?	$10^6$	$2 \cdot 10^8$	?	?	-
2	$2 \cdot 10^7$	?	?	?	-	-	?	$^{60}_{27}\text{Co}$
3	?	?	$3,7 \cdot 10^{10}$	?	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^6$	?	-
4	$3 \cdot 10^8$	?	?	?	$3 \cdot 10^6$	?	-	$^{210}_{84}\text{Po}$
5	?	$2 \cdot 10^{-5}$	?	?	$4 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^8$	?	-
6	$2,5 \cdot 10^6$	?	?	?	-	-	?	$^{222}_{86}\text{Rn}$
7	-	?	?	28 лет	-	-	-	?
8	$7 \cdot 10^{10}$	?	?	?	$10^{10}$ лет	?	?	$^{238}_{92}\text{U}$

### Контрольные вопросы к главам 12–15

1. Основные характеристики теплового излучения тел. Законы Кирхгофа, Вина, Стефана-Больцмана, Релея-Джинса.
2. Гипотеза Планка для теплового излучения тел.
3. Законы Столетова и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.
4. Параметры фотонов и давление света.
5. Эффект Комптона.
6. Гипотеза де-Бройля и принцип неопределённости.
7. Волновая функция, её свойства, суперпозиция состояний.
8. Операторы квантовой механики.
9. Оператор момента импульса, спин-частиц.
10. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.
11. Частица в потенциальной яме.
12. Боровская теория атома. Условия частот Бора.
13. Уравнение Шредингера для водородоподобного атома.
14. Квантовые числа, энергетические уровни.
15. Принцип Паули, порядок заполнения электронами слоев.
16. Таблица элементов Менделеева.
17. Вынужденное излучение. Лазеры.
18. Зонная структура энергетического спектра.
19. Состав и свойства атомных ядер.



20. Свойства ядерных сил. Обменное взаимодействие нуклонов.
21. Модель нуклонных оболочек. Магические числа.
22. Радиоактивное превращение ядер.  $\alpha$  и  $\beta$ -распады.
23. Классификация ядерных реакций.
24. Реакции деления и синтеза ядер.
25. Классификация элементарных частиц.
26. Составная структура адронов. Кварки.
27. Теория Дирака. Античастицы.

### **Список литературы**

1. Астахов А. В., Широков Ю. М. Квантовая физика. М.: Наука, 1983. 240 с.
2. Воронов В. К., Подоплелов А. В. Современная физика: учеб. пособие. М.: КомКнига, 2005. 512 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 750 с.
4. Савельев И. В. Курс общей физики. М.: Астрель, 2001. Т. 5. 370 с.
5. Харченко В. И., Шамонин В. А. Квантовая механика и квантовая химия. Чита: ЧитГУ, 2006. 137 с.

## Заключение

Данное пособие содержит основные теоретические сведения по основным разделам классической и квантовой физики, тщательно отобранные и систематизированные в соответствии с требованиями современных образовательных стандартов, что позволит студенту самостоятельно справляться с большим объёмом учебной информации. Изложение материала соответствует курсу лекций, это даст студентам возможность больше внимания уделять осмыслению информации, получаемой в процессе слушания лекции и ведения конспекта.

Поскольку учебный процесс студента по большей части является процессом самообразования, то предлагаемая книга может быть использована в качестве «самоучителя». Зачётные требования и задания, а также контрольные вопросы к отдельным главам пособия служат для закрепления теоретических знаний и выработки навыков по их применению.

Издание предназначено для студентов различных направлений подготовки бакалавров. Для авторов очень важно знать мнение студентов и преподавателей о структуре пособия и форме представления информации о том, насколько полезным оно было при подготовке к экзаменам и зачётам, при ведении конспекта, в процессе самостоятельной работы над теоретическими и практическими вопросами. Отзывы, предложения, замечания просим направлять на кафедру физики ЗабГУ, по адресу: Чита, ул. Александрo-Заводская, 30, Забайкальский государственный университет, кафедра физики.

Желаем студентам успехов при изучении курса физики и надеемся, что пособие окажется полезным в повседневном процессе получения и применения ваших знаний!

## Библиографический список

1. Верхотуров, А. Р. Физика: учеб. пособие по курсу общ. физики для направлений подготовки бакалавров: в 2 кн. / А. Р. Верхотуров, В. А. Шамонин, С. Ю. Белкин. – Чита: ЧитГУ, 2010. – Кн. 1. – 241 с.
2. Верхотуров, А. Р. Физика: учеб. пособие по курсу общ. физики для направлений подготовки бакалавров: в 2 кн. / А. Р. Верхотуров, В. А. Шамонин. – Чита: ЧитГУ, 2011. – Кн. 2. – 176 с.
3. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – 3-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Книжный мир, 2006. – 328 с.
4. Дмитриева, В. Ф. Основы физики: учеб. пособие / В. Ф. Дмитриева, В. Л. Прокофьев. – Москва: Высшая школа, 2001. – 527 с.
5. Иродов, И. В. Задачи по общей физике: учеб. пособие / И. В. Иродов. – 8 изд. – Москва: БИНОМ, 2007. – 431 с.
6. Савельев, И. В. Курс физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – Т. 1–3.
7. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – Москва: Академия, 2011. – 592 с.
8. Трофимова, Т. И. Физика. 500 основных законов и формул / Т. И. Трофимова. – Москва: Академия, 2014. – 112 с.
9. Трофимова, Т. И. Физика. Краткий курс / Т. И. Трофимова. – Москва: Кнорус, 2017. – 272 с.
10. Фриш, С. Э. Курс общей физики: в 3 т. / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – Т. 1–3.
11. Хавруняк, В. Г. Курс физики / В. Г. Хавруняк. – Москва: Инфа-М, 2014. – 400 с.
12. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Москва: Транспортная компания, 2017. – 640 с.

Учебное издание

**Верхотуров** Анатолий Русланович  
**Шамонин** Виктор Александрович  
**Белкин** Сергей Юрьевич

## **Физика**

Печатается с оригинал-макета при участии издательства

Редактор Е. В. Валюкова  
Вёрстка С. Я. Непомнящих

Подписано в печать 12.07.2018.  
Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать цифровая. Гарнитура Times New Roman.  
Уч.-изд. л. 12,4. Усл. печ. л. 20,8.  
Тираж 100 экз. (1-й з-д – 1–36 экз.). Заказ № 18109.

ФГБОУ ВО «Забайкальский государственный университет»  
672039, Чита, ул. Александро-Заводская, 30