Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Забайкальский государственный университет»

В. Г. Черкасов
И. И. Петухова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Чита
Забайкальский государственный университет
2015

УДК 531(075)
ББК 22.21я7
Ч-48

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом
Забайкальского государственного университета

Рецензенты

О. А. Баландин, д-р техн. наук, профессор, ЗабИЖТ
В. В. Степанов, канд. техн. наук, доцент, ЗабИЖТ

Черкасов, Валерий Георгиевич

Ч-48 Теоретическая механика : учеб. пособие / В. Г. Черкасов, И. И. Петухова ; Забайкал. гос. ун-т. – Чита : ЗабГУ, 2015. – 124 с.

ISBN 978-5-9293-1484-1

В учебное пособие включены основные положения классического курса теоретической механики, комплекс заданий и задач, описание хода их решений.

Данное издание предназначено для самостоятельной работы студентов втузов немеханических специальностей и может быть использовано студентами-заочниками как пособие при выполнении контрольных работ по этому курсу.

УДК 531(075)
ББК 22.21я7

ISBN 978-5-9293-1484-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика базируется на общетеоретических предметах – физике, математике – и является основой для изучения других дисциплин профессионального цикла – сопротивления материалов, прикладной механики, гидравлики, теории механизмов и машин и специализированных дисциплин. Основу учебного пособия составляют индивидуальные задания и примеры по их выполнению. Решение задач учит студентов самостоятельно работать с литературой, развивает технический кругозор, позволяет им приобрести навыки инженерного подхода к решению технических задач. Это учебное издание может быть использовано при выполнении контрольных работ студентами-заочниками.

Количество контрольных работ устанавливается учебным планом заочной формы обучения. Если по учебному плану студент должен выполнять три контрольные работы, то эти работы включают:

– первая контрольная работа – задания С1, С2, К1, К2;

– вторая контрольная работа – задания Д1, Д2, Д3, Д4;

– третья контрольная работа – задания Д5, Д6, Д7, Д8.

При выполнении двух контрольных работ:

– первая контрольная работа – задания С1, С2, К1, К2;

– вторая контрольная работа – задания Д1, Д4, Д6, Д8.

При выполнении одной контрольной работы – задания С1, К2, Д1, Д4.

Студент во всех заданиях выбирает номер варианта по последним цифрам шифра зачётной книжки: номер рисунка – по предпоследней цифре шифра, номер условия в табли-

це – по последней цифре (например, если шифр оканчивается числом 28, то номер рисунка – 2, номер условия из таблицы – 8).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На обложке указывают: название дисциплины, номер работы, фамилию и инициалы студента, учебный шифр, специальность и адрес.

Решение каждого задания нужно обязательно начинать с новой страницы. Сверху указывают номер задания, далее делают чертёж и записывают, что дано в задании и что требуется определить (текст задания не переписывают). Чертежи должны быть аккуратными и наглядными, выполненными в соответствии с правилами ЕСКД. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчётов (ориентироваться можно по описанию далее приведённых примеров).

Содержание, форму, порядок оформления расчётно-графических работ студентов дневной формы обучения определяет преподаватель.

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия и аксиомы

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твёрдому телу.

Основными объектами исследования в теоретической механике являются:

– *материальная точка* – это материальное тело, размерами которого можно пренебречь;

– *механическая система* – это любая совокупность материальных точек;

– *абсолютно твёрдое тело* – это механическая система, расстояние между точками которой не изменяется при любых взаимодействиях.

В основе статики лежат её аксиомы.

1. *Аксиома инерции*. Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

2. *Аксиома равновесия двух сил*. Две силы, приложенные к твёрдому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны.

3. *Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил.* Действие системы сил на твёрдое тело не изменится, если к ней присоединить или из неё исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

4. *Аксиома параллелограмма сил.* Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, постро-

енного на этих силах (см. рис. 1.1) и выражается геометрическим равенством: $\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$, а модуль этой силы определяется по формуле

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\varphi}.$$

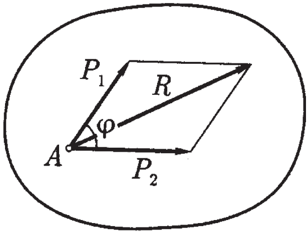


Рис. 1.1

5. *Аксиома равенства действия и противодействия*. Всякому действи. соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

6. *Аксиома затвердевания*. Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании.

В основе разделов статики лежит понятие силы.

Сила – это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Сила определяется тремя элементами: числовым значением или модулем, направлением и точкой приложения. За единицу измерения силы в системе СИ принимается ньютон (*Н*). Модуль вектора силы можно определить по методу проекций, т. е. по отношению к координатным осям. Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и оси, определяя знак проекции непосредственно по чертежу. Если направление оси и проекции силы в одну сторону, то проекция положительна, т. е. со знаком (+), если противоположна, то со знаком (–) .

Совокупность нескольких сил, приложенных к твёрдому телу, является *системой сил.*

Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется *равнодействующей*.

Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная в противоположную сторону, называется *уравновешивающей силой.*

С понятием силы связано важное определение – момент силы относительно точки и оси.

Моментом силы относительно точки O (см. рис. 1.2а) называется вектор, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку, в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть силу стремящейся вращать плоскость в сторону, обратную вращению часовой стрелки. В векторной форме получаем $\overline{M}_0(\overline{P}) = \overline{P} \cdot \bar{r}$, а модуль этого вектора равен произведению модуля силы P на её плечо d относительно точки O: $M_o = Pd.$

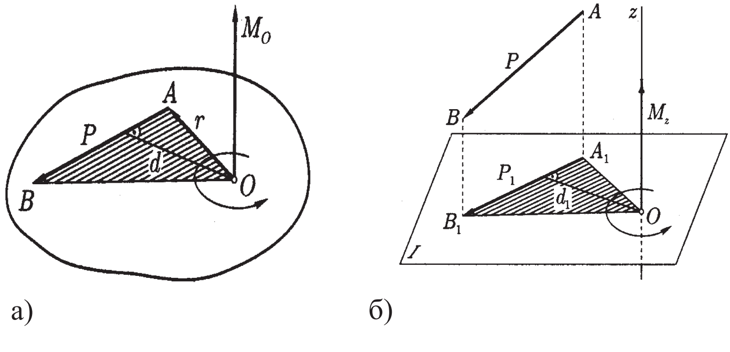


Рис. 1.2

Знак выбирается:

– если сила P пытается вращать против часовой стрелки, значит, момент положительный;

– если сила P пытается вращать по часовой стрелке, значит, момент отрицательный.

Моментом силы относительно оси z (см. рис. 1.2б) называется взятое со знаком минус или плюс произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, на плечо от точки пересечения оси с плоскости до проекции силы на плоскости: $M_z = P_1 d_1$.

Момент силы в системе СИ имеет единицу размерности – ньютон · метр (*Н·м*).

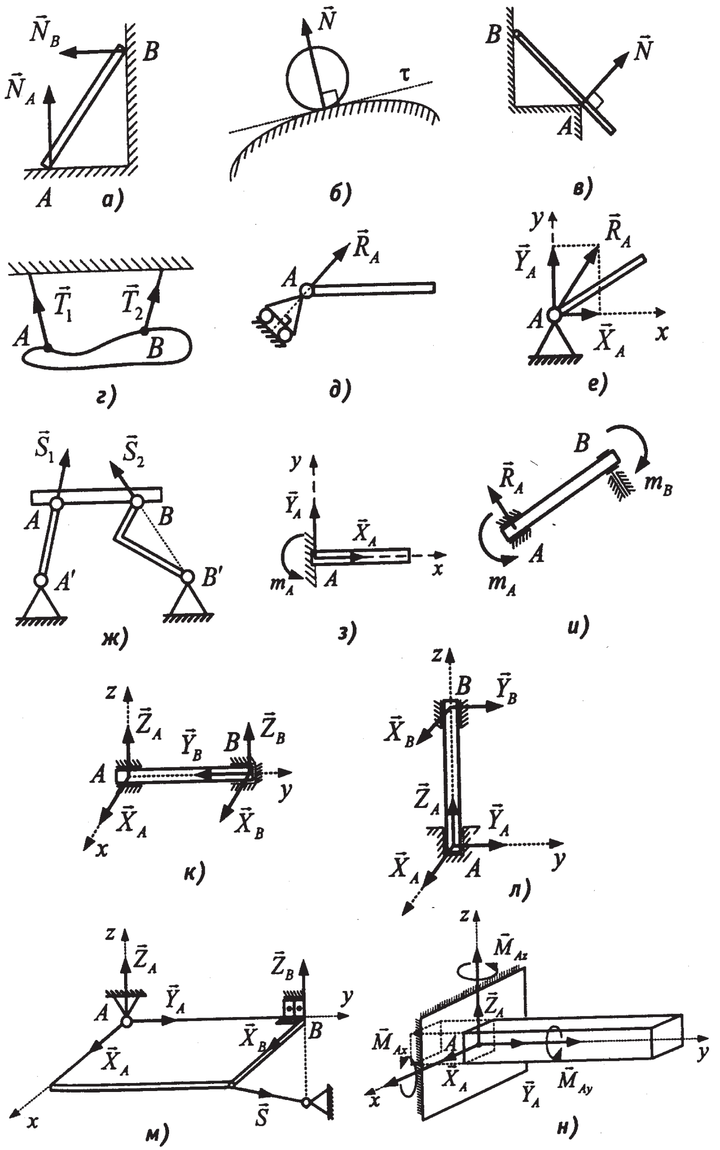
На равновесие тела влияют наложенные на него связи. *Связь* – это тело, ограничивающее свободу движения рассматриваемого тела. Для того чтобы избавиться от связей, необходимо применить принцип освобождаемости от связей: «Несвободное твёрдое тело можно рассмотреть как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связей».

Задаваемые силы – это силы, определяющие действие на тела других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакции связей – это сила или система сил, определяющие действие на тела связи. Основные типы связей и реакций, соответствующих этим связям, показаны на рис. 1.3.

1.2. Система сходящихся сил

Силы называются сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке. Действие сходящихся сил на твёрдое тело характеризуется равнодействующей. Чтобы система сходящихся сил была уравновешена, достаточно выполнения условия: геометрическая сумма сил ($\sum \overline{F} = 0$) или сумма проекций сил на каждую из координатных осей должны быть равны нулю, т. е. $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$.



$\vec{N}_B$
$\vec{N}_A$
B
A
а)
$\vec{N}$
τ
б)
B
A
$\vec{N}$
в)
$\vec{T}_1$
$\vec{T}_2$
A
B
г)
$\vec{R}_A$
A
д)
y
$\vec{R}_A$
$\vec{Y}_A$
A
$\vec{X}_A$
x
е)
$\vec{S}_1$
$\vec{S}_2$
A
B
A′
B′
ж)
y
$\vec{Y}_A$
$\vec{X}_A$
m_A
A
x
з)
B
$\vec{R}_A$
m_B
A
m_A
и)
z
$\vec{Z}_A$
$\vec{Y}_B$
B
$\vec{Z}_B$
A
y
$\vec{X}_A$
$\vec{X}_B$
x
к)
z
B
$\vec{Y}_B$
$\vec{X}_B$
$\vec{Z}_A$
$\vec{Y}_A$
$\vec{X}_A$
A
y
л)
z
$\vec{Z}_A$
$\vec{Z}_B$
y
A
$\vec{Y}_A$
$\vec{X}_B$
B
$\vec{X}_A$
x
$\vec{S}$
м)
z
$\vec{M}_{Az}$
$\vec{Z}_A$
$\vec{M}_{Ax}$
A
y
x
$\vec{X}_A$
$\vec{Y}_A$
$\vec{M}_{Ay}$
н)

Рис. 1.3

1.3. Пара сил

Система равных по модулю, противоположно направленных, параллельных сил называется парой сил.

Действие пары сил на твёрдое тело характеризуется её моментом. Моментом пары сил называется вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силы пары, в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть силы стремящимися вращать против часовой стрелки. *Условие равновесия тела под действием пар сил:* геометрическая сумма моментов пар сил равна нулю ($\sum\overline{M} = 0$) или проекция этой суммы на координатные оси декартовой системы координат равна нулю $\sum M_x = 0$; $\sum M_y = 0$; $\sum M_z = 0$.

1.4. Произвольная система сил

Произвольная система сил характеризуется действием на твёрдое тело главным вектором $\overline{R}^* = \sum\overline{F}_{\mathrm{i}}$ и главным моментом $\overline{M}_O{}^* = \sum\overline{M}_{Oi}$ произвольной системы сил. Главным вектором произвольной системы сил называется геометрическая сумма произвольных сил. Главным моментом произвольной системы сил относительно центра приведения называется геометрическая сумма моментов сил, действующих на тело относительно центра приведения. Выбор центра приведения не влияет на числовое значение и направление главного вектора, но влияет на модуль и направление главного момента произвольной системы сил.

Условие равновесия произвольной системы сил, действующей на твёрдое тело – это $\overline{R}^* = 0$ и $\overline{M}_O{}^* = 0$ или при ориентировании системы в плоскости или в пространстве это соотношение может преобразоваться:

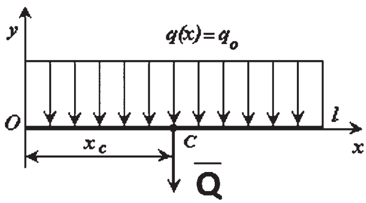
для плоскости: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_O(\overline{F}_i) = 0$; для пространства: $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$; $\sum M_x(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_y(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_z(\overline{F}_i) = 0$.

1.5. Распределённая нагрузка

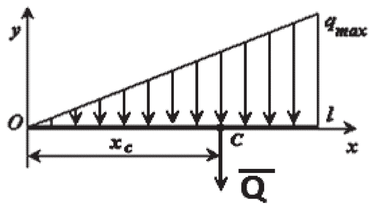
Распределённая нагрузка q по отрезку при действии на твёрдое тело может быть заменена сосредоточенной силой Q. Сосредоточенная сила эквивалентна соотношению: $Q = \int_0^l q(x)dx$ и прикладывается в точке C с координатой

$$x_C = \frac{\int_0^l x \cdot q(x)dx}{R}.$$

Рассмотрим примеры действия на твёрдое тело распределённой нагрузки.

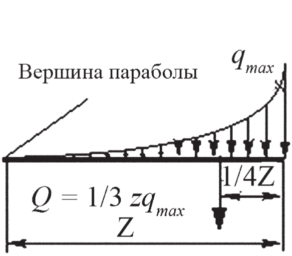


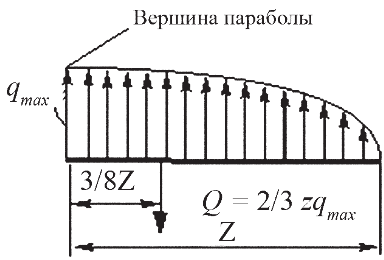
$$Q = ql; \quad x_C = \frac{l}{2}$$



$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l,$$

$$x_C = \frac{2l}{3}.$$





1.6. Центр тяжести

Центром параллельных сил, найденный последовательным сложением параллельных сил, будем называть точку C, радиус-вектор которой определяется формулой: $\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{F}_i \bar{r}_i}{\sum \bar{F}_i} = \frac{\sum \bar{F}_i \bar{r}_i}{\bar{R}}$ или в проекциях на координатные оси: $x_C = \frac{\sum \bar{F}_i x_i}{\sum \bar{F}_i} = \frac{\sum \bar{F}_i x_i}{\bar{R}}$, $y_C = \frac{\sum \bar{F}_i y_i}{\sum \bar{F}_i} = \frac{\sum \bar{F}_i y_i}{\bar{R}}$, $z_C = \frac{\sum \bar{F}_i z_i}{\sum \bar{F}_i} = \frac{\sum \bar{F}_i z_i}{\bar{R}}$, где $\bar{F}_i$ – i-тая сила в системе параллельных сил, r_i – радиус-вектор, x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения параллельных сил.

Центр тяжести тела – это центр параллельных сил тяжести, т. е. геометрическая точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести тела при любом положении тела в пространстве.

Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ – удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i – объём этой части тела, то тогда центр тяжести будет иметь вид:

$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i},\ y_C = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i},\ z_C = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}.$$

Если тело характеризуется площадью (S) или размером (l), то центр тяжести соответственно будет определяться:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i},\ y_C = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i},\ z_C = \frac{\sum S_i z_i}{\sum S_i},$$

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i},\ y_C = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i},\ z_C = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}.$$

Задание С1
Определение реакций опор твёрдого тела

На жёсткую ломаную раму (см. рис. 1.4) действуют пара сил с моментом M = 5 кНм, распределённая нагрузка q и сила P. Размеры элементов конструкции, величина, направление и точка приложения силы P, а также закономерность распределённой нагрузки, её максимальные значения и участок действия принять согласно табл. 1.1. Определить реакции в опорах, если $\alpha = 40°$, $\beta = 70°$.

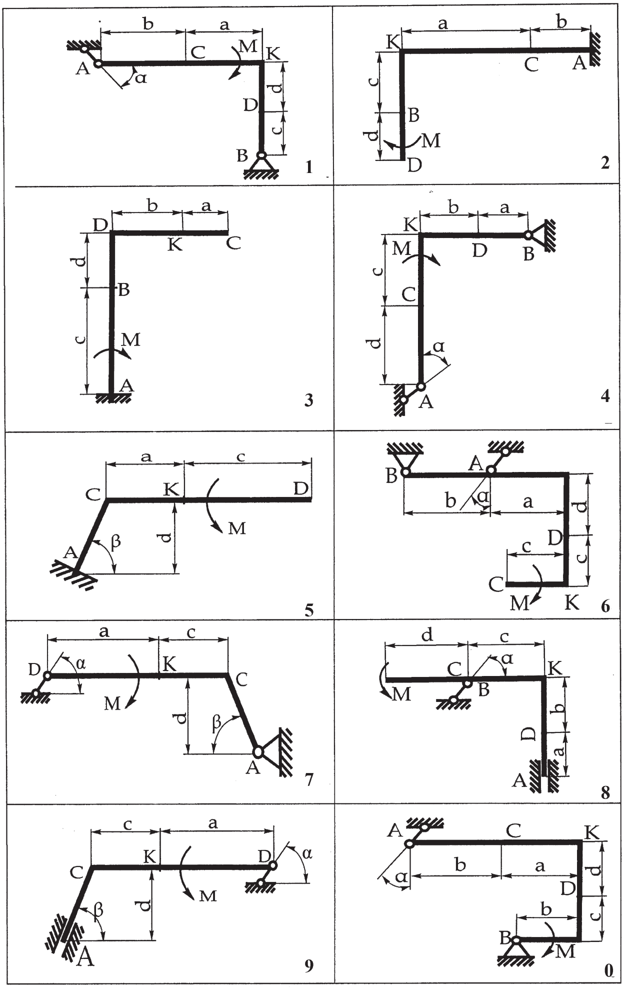
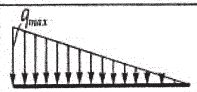
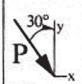
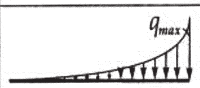
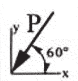
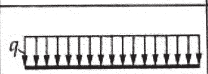
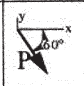
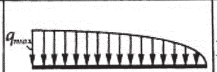
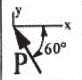
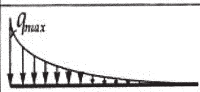
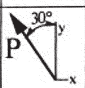
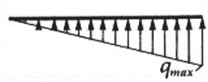
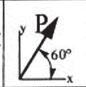
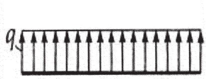
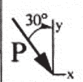
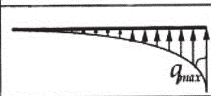
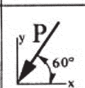
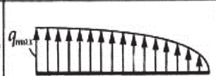
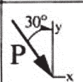
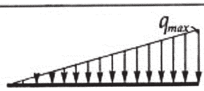
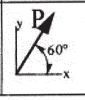


Рис. 1.4

Таблица 1.1

Варианты	Схема распределения интенсивности	Участок	Расположение силы P	Точка приложения силы	P, кН	a, м	b, м	c, м	d, м	Значения q или q_{max} кН/м
1		KC		D	8	2	1	2	2	3
2		KC		K	6	1	2	2	3	3
3		KD		C	6	1	3	3	2	3
4		KD		D	10	2	2	2	2	2
5		KC		K	40	10	10	10	6	4
6		KC		K	8	3	4	4	3	5
7		KD		C	8	4	3	3	4	5
8		KC		D	50	8	10	10	10	5
9		KC		D	9	2	1	4	3	2
0		KD		C	9	1	3	1	2	3

Пример. На жёсткую конструкцию *ABC* (см. рис. 1.5), закреплённую в точке *A* шарнирным стержнем под углом *α,* а в точке *B* – вертикальной направляющей, действуют сила P, пара сил с моментом *M* и распределённая нагрузка, эпюра которой представлена треугольной формой с максимальной интенсивностью q_{max}.

Дано: $P = 10$ *кН,* $M = 5$ *кНм,* $q_{max} = 3$ *кН/м,* $\alpha = 60°$, $a = 2$ *м,* $b = 6$ *м,* $c = 2{,}5$ *м,* $d = 1{,}5$ *м, распределённая нагрузка действует на участке КС.*

Определить: реакции связей в опорах *A* и *B*.

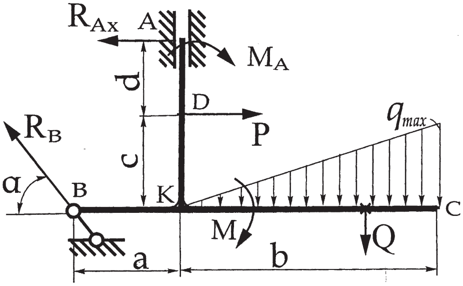


Рис. 1.5

Решение. Для определения реакций выбираем расположение осей *x* – горизонтально, *y* – вертикально и изображаем действующие на стержень внешние силы и реакции R_B, R_{Ax}, M_A.

Равнодействующую распределённой нагрузки принимаем, как $Q = \frac{q_{\max} b}{2}$ с точкой её приложения на расстоянии *2/3b* от точки *K*. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$\sum F_{xi} = 0;\ P - R_{Ax} - R_B \cos\alpha = 0;$

$\sum F_{yi} = 0;\ R_B \sin\alpha - Q = 0;$

$\sum M_{Bi} = 0;\ R_{Ax}(c + d) - Pc - M_A - M - Q(a + 2/3b) = 0.$

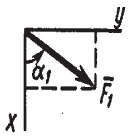
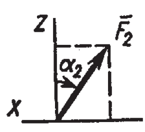
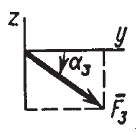
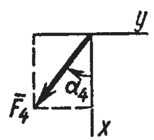
Подставив числовые значения и решив систему уравнений, определяем искомые реакции.

Ответ: $R_{Ax} = 4{,}8$ кН, $R_B = 10{,}4$ кН, $M_A = -64{,}8$ кНм. Знак минус у реакции M_A указывает на то, что её направление противоположно показанному на рисунке.

Задание С2
Определение реакций опор пространственной конструкции

Прямоугольные тонкие плиты (см. рис. 1.6), вес которых соответственно равен $P_1 = 10$ кН и $P_2 = 8$ кН, жёстко соединены между собой под прямым углом и располагаются параллельно координатным плоскостям. Их крепление осуществляется сферическим шарниром (или подпятником) в точке *A*, подшипником в точке *B* и невесомым стержнем *1*. К плитам приложены пара сил с моментом *M* = 20 кНм, лежащая в плоскости действия одной из плит и две силы, у которых значение, направление и точка их приложения принимаются согласно табл. 1.2. Точки *K*, *E* и *H* являются серединами сторон. Все стержни прикреплены к плитам посредством шарниров. Определить реакции связей конструкции, если *a* = 0,5 м.

Таблица 1.2

Сила								
Вариант	***F_1 = 5 кН***		***F_2 = 10 кН***		***F_3 = 8 кН***		***F_4 = 6 кН***	
	Точка приложения	***α_1, град.***	***Точка приложения***	***α_2, град.***	***Точка приложения***	***α_3, град***	***Точка приложения***	***α_4, град.***
1	D	60	H	30	–	–	–	–
2	–	–	D	60	–	–	K	45
3	–	–	E	30	D	30	–	–

4	E	45	–	–	–	–	D	60
5	–	–	H	45	K	30	–	–
6	K	60	–	–	H	60	–	–
7	–	–	–	–	E	45	D	45
8	H	60	–	–	D	30	–	–
9	–	–	D	30	E	60	–	–
0	D	60	–	–	–	–	E	30

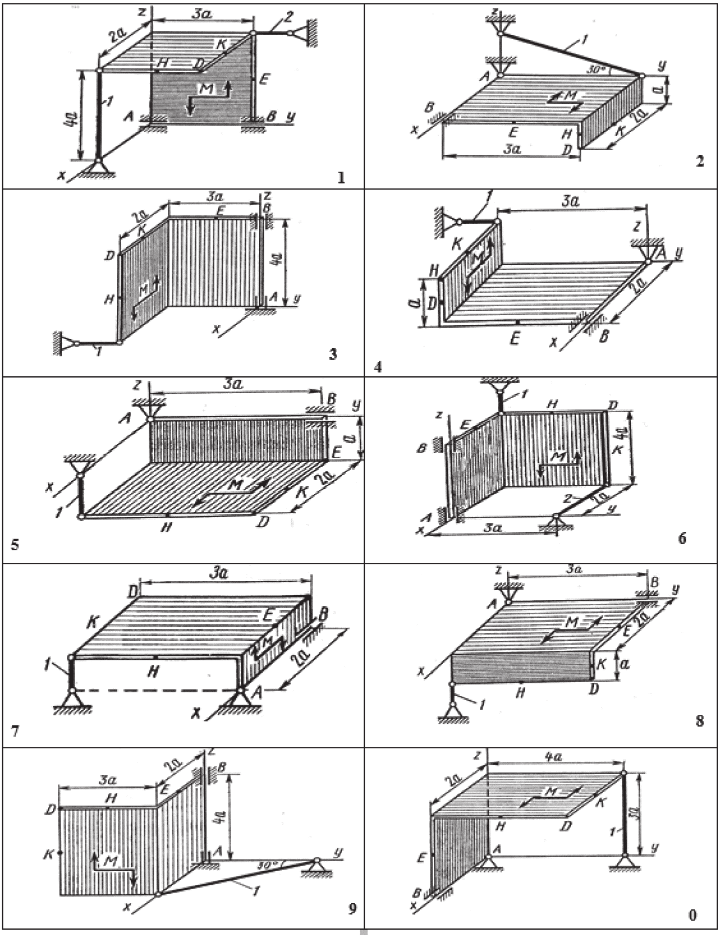


Рис. 1.6

Указания: Задача С2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием произвольной пространственной системы сил. При решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трём координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости перпендикулярной оси шарнира (подшипника).

Пример. Система из трёх взаимосвязанных плит (см. рис. 1.7) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим подшипником в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила F, а в плоскости, параллельной yz, – пара сил с моментом M. Вес горизонтальной плиты равен P.

Дано: P = 12 Н, M = 10 Нм, F = 5 Н, α = 60°, AB = 1,2 м, AC = 0,8 м, BE = 0,2 м, EH = 0,4 м.

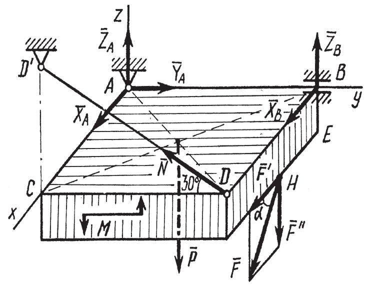


Рис. 1.7

Решение: Рассмотрим равновесие пластины. На неё действуют заданные силы P, F и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие X_A, Y_A, Z_A, подшипника – на две составляющие X_B, Z_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию N стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия пространственной системы сил, действующих на плиты:

$\sum F_{xi} = 0;\ X_A - X_B + F\cos\alpha = 0;$

$\sum F_{yi} = 0;\ Y_A - N\cos 30° = 0;$

$\sum F_{zi} = 0;\ Z_A + Z_B - P + N\sin 30° - F\sin\alpha = 0;$

$\sum M_{xi} = 0;\ M - P \cdot AB/2 + (Z_B - F\sin\alpha + N\sin 30°)AB = 0\ ;$

$\sum M_{yi} = 0;\ F\sin\alpha \cdot AC/2 - F\cos\alpha \cdot BE + P \cdot AC/2 -$
$- N\sin 30° \cdot AC = 0;$

$\sum M_{zi} = 0;\ - N\cos\alpha \cdot AC - F\cos\alpha \cdot AB - X_B \cdot AB = 0.$

Подставив численные значения в составленные уравнения и решив их, найдем искомые реакции связей.

Ответ: $X_A = 8{,}75$ Н, $Y_A = 13{,}1$ Н, $Z_A = 15{,}44$ Н, $X_B = -11{,}25$ Н, $Z_B = -6{,}66$ Н, $N = 15{,}1$ Н. Знак минус у найденных реакций X_B и Z_B указывает, что у этих сил направление противоположно показанному на расчётной схеме.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие тела называются абсолютно твёрдым и что называется материальной точкой?
2. Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твёрдое тело?
3. Какая сила называется равнодействующей данной системы сил?
4. Если деформируемое (не абсолютно твёрдое) тело находится в равновесии под действием некоторой системы сил, то будут ли эти силы удовлетворять условиям равновесия абсолютно твёрдого тела?

5. Какое тело называется несвободным и что называется силой реакции связи?

6. Назовите условия равновесия системы сходящихся сил.

7. В чём состоит теорема о трёх уравновешивающихся непараллельных силах?

8. Что называется парой сил? Чем характеризуется действие пары сил на твёрдое тело? Как направлен и чему равен по величине вектор-момент пары?

9. При каком условии две пары будут эквивалентны?

10. Могут ли быть эквивалентны две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях?

11. Что называется связью? Виды связи. В чём заключается принцип освобождаемости от связей?

12. Назовите условие равновесия системы пар сил.

13. Что называется моментом силы относительно данной точки? Как выбирается знак этого момента?

14. Изменится ли момент силы относительно данной точки при переносе силы по линии её действия?

15. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю? Приведите примеры.

16. Чему равен момент силы относительно точки, лежащей на её линии действия (объясните, почему)?

17. Что называется главным вектором данной системы сил? Что называется главным моментом системы сил относительно данной точки?

18. Изменяются ли главный вектор и главный момент данной системы сил при переносе центра приведения?

19. Сформулируйте принцип Пуансо.

20. Назовите основные аксиомы статики.

21. В чём заключается метод решения задачи о равновесии системы, состоящей из нескольких твёрдых тел? Сколько независимых уравнений равновесия можно составить в такой задаче, если все силы, действующие на систему, лежат в одной плоскости?

22. Что называется моментом силы относительно данной оси? Как выбирается знак этого момента?

23. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?

24. Какая существует зависимость между вектором-моментом силы относительно данной точки и моментом той же силы относительно оси, проходящей через эту точку?

25. Чему равны проекции главного вектора данной системы сил на каждую из координатных осей?

26. В каком случае система сил приводится к одной паре?

27. Каковы условия равновесия пространственной системы сил?

28. Что называется центром данной системы параллельных сил?

29. Что изучает теоретическая механика, на какие разделы делится?

30. Что изучает статика?

31. Что называется механической системой?

32. Какие силы называются равнодействующими и уравновешивающимися? Чем они отличаются друг от друга?

33. Как определить центры тяжести линии, тонкой пластины, твёрдого тела?

2. КИНЕМАТИКА

Кинематикой называют раздел теоретической механики, изучающий движение материальных тел с геометрической точки.

В основе раздела «Кинематика» лежат основные определения:

Законом движения точки (твёрдого тела) называется математическая зависимость, определяющая положение точки (тела) в пространстве от времени.

Траекторией точки называется любая линия, описанная движущейся точкой.

2.1. Кинематика точки

Существует три основных способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

*Векторный способ задания движения точк*и заключается в том, что положение точки определяется радиус-вектором от некоторой неподвижной точки. В каждое новое положение точки можно провести радиус-вектор. Зависимость радиус-вектора от времени является законом движения точки в векторной форме – $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Траектория точки определяется концом радиус-вектора, поэтому траектория точки в векторном способе – это годограф радиус-вектора $\bar{r}$ или геометрическое место концов радиус-вектора $\bar{r}$.

Координатный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки определяется системой декартовых координат. В каждый момент времени точка имеет определённые координаты. Зависимость этих координат от времени – закон движения точки в координатной форме, т. е. $x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$.

Чтобы определить уравнение траектории в координатном способе нужно выразить параметр независимой переменной t через одну из координат, например, через x. Если $t = u(x)$, тогда $y = f_1(u(x))$, $z = f_2(u(x))$.

Естественный способ задания движения точки заключается в том, что положение точки заранее известно. На траектории точки от некоторой неподвижной точки (начало координат) откладывается криволинейная координата s. Изменение криволинейной координаты s от времени является закон движения точки в естественной форме и уравнением траектории – $s = f(t)$.

Самым распространенным способом является координатный способ задания движения точки. Этот способ связан с другими способами соотношениями:

– взаимосвязь векторного и координатного способов задания движения точки: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные орто-вектора координатных осей x, y, z;

– взаимосвязь естественного и координатного способов задания движения точки: $s = \int_{t1}^{t2} \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} dt$.

Движение точки по траектории характеризует скорость и ускорение точки.

Скорость точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве от времени.

Скорость точки направлена по касательной к траектории и в системе СИ измеряется в *м/с*.

Скорость точки в зависимости от способа задания движения точки можно определить:

1. Векторным способом $\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}$.

2. Координатным способом $\overline{V} = V_x\overline{i} + V_y\overline{j} + V_z\overline{k}$, где $V_x = \frac{dx}{dt}$, $V_y = \frac{dy}{dt}$, $V_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости на координатные оси.

Модуль скорости можно определить по методу проекций $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

3. Естественным способом $\overline{V} = \frac{ds}{dt}\overline{\tau}$, где $V = \frac{ds}{dt}$ – модуль скорости, $\overline{\tau}$ – единичный орто-вектор касательной.

Ускорение точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направления вектора скорости. Ускорение точки в системе СИ измеряется в *м/с*^{2}. Ускорение точки в зависимости от способа задания движения можно определить:

1. Векторным способом: $\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{d^2t}$.

2. Координатным способом: $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, где $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{d^2t}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{d^2t}$, $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{d^2t}$ – проекции скорости на координатные оси. Модуль ускорения точки определяется через проекции $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

3. Естественным способом: $\overline{a} = a_\tau\overline{\tau} + a_n\overline{n}$, где a_τ, a_n – модули касательного и нормального ускорений, $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ – единичный орто-вектор касательной и нормали в естественном трёхграннике.

Касательное ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля скорости. По модулю касательное ускорение определяется как $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{d^2t}$. Это ускорение можно определить, продифференцировав соотношение $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, в результате получим: $a_\tau = \frac{V_xa_x + V_ya_y + V_za_z}{V}$.

Нормальное ускорение определяется как $a_n = V^2/\rho$, где ρ – радиус кривизны траектории точки. Модуль и направление ускорения при естественном способе задания движения определяются соотношениями: $a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}}$, $\cos(\overline{a}, \overline{\tau}) = \dfrac{a_\tau}{a}, \cos(\overline{a}, \overline{n}) = \dfrac{a_n}{a}$.

2.2. Кинематика твёрдого тела

В зависимости от движения тела кинематику твёрдого тела можно разделить на пять разделов: поступательное движение твёрдого тела, вращательное движение твёрдого тела, плоское или плоскопараллельное движение твёрдого тела, сферическое движение твёрдого тела, общий случай движения твёрдого тела.

Поступательным движением твёрдого тела называется такое движение твёрдого тела, при котором прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Свойства точек тела, движущегося поступательно, определяется теоремой: Все точки твёрдого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и имеют одинаковые скорости и ускорения. На основании этой теоремы, если знать, как движется одна точка такого тела, то аналогично будут двигаться и другие точки тела, поэтому поступательное движение твёрдого тела сводится к кинематике точки. Закон поступательного движения можно представить выражениями: при векторном способе – $\overline{r}_C = \overline{r}(t)$ при координатном способе – $x_C = f(t)$, $y_C = f(t)$, $z_C = f(t)$; при естественном способе – $s_C = f(t)$, где C – центр тяжести или массы тела.

Вращательным движением твёрдого тела называется такое движение тела, при котором все точки этого тела остаются неподвижными, находящиеся на некоторой прямой, называемой осью вращения, а остальные точки описывают окружность с центром на этой прямой.

Вращение тела вокруг неподвижной оси определяется углом поворота φ. Угол поворота считается положительным, если вращение тела происходит против часовой стрелки. В системе СИ угол поворота φ измеряется в радианах. Изменение угла поворота от времени – $\varphi = f(t)$ – это закон вращательного движения твёрдого тела. Угол поворота φ в зависимости от оборотов тела n, совершенных вращением вокруг оси, связаны соотношением: $\varphi = 2\pi n$.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением.

Угловая скорость определяется изменением угла поворота с течением времени и численно равна $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. В системе СИ угловая скорость измеряется в *рад/с* или c^{-1}.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени и численно равна $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. В системе СИ имеет единицу измерения – *рад/с*^{2} или c^{-2}.

Скорость и ускорения точки (например, A) тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяются: $V_A = \omega R$, $a_{A\tau} = \varepsilon R$, $a_{An} = \omega^2 R$, $a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, где R – радиус вращения точки. Радиус вращения точки – это перпендикуляр от точки тела до оси вращения.

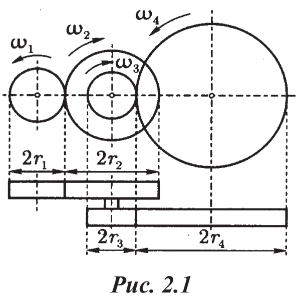


Рис. 2.1

Передаточные механизмы (см. рис. 2.1) предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым, и характеризуются передаточным числом i. В этом примере (см. рис. 2.1) передаточные числа i_{1-2} для колес *1–2* и

i_{3-4} для колес *3–4*: $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$, $i_{3-4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{z_4}{z_3}$, где z – число зубьев колес.

Для всего механизма: $i = i_{1-2} i_{3-4}$.

Плоским движением твёрдого тела называется такое движение твёрдого тела, при котором точки движутся в плоскости параллельно некоторой неподвижной плоскости. В результате того, что точки тела движутся в плоскостях, такое тело называют плоской фигурой.

Движение твёрдого тела¸ совершающего плоское движение, можно рассмотреть как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения тела с произвольной точкой, называемой полюсом, и вращения тела вокруг полюса. Выбор полюса влияет на поступательную часть движения плоской фигуры, но не влияет на вращение тела вокруг полюса.

Законом плоского движения твёрдого тела с полюсом в точке A являются следующие уравнения: $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$.

Скорость точки плоской фигуры можно определить несколькими способами.

Первый способ: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости точки вокруг полюса $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB}$, где $\overline{V}_B$ – искомая скорость; $\overline{V}_A$ – скорость полюса A; $\overline{V}_{AB}$ – вращательная скорость точки B вокруг полюса, которая перпендикулярна расстоянию AB и численно равна $V_{AB} = \omega \cdot AB$; ω – угловая скорость фигуры.

Этот способ имеет следствие о проекции скоростей точек плоской фигуры, которое часто применяется при решении задач: проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проведённую через эти точки, равны.

Второй способ определения скорости точки плоской фигуры через мгновенный центр скоростей (МЦС). Мгновенный центр скоростей – это единственная точка фигуры при плоском движении, которая в каждый момент времени имеет скорость, равную нулю. Если у плоской фигуры известен МЦС, то вектор скорости этой точки направлен перпендикулярно к отрезку, соединяющему точку с МЦС, в сторону угловой скорости фигуры, а численно этот вектор равен: $V_B = \omega \cdot BS$ где S – МЦС тела. Тогда при решении задач на основании этого соотношения используют свойства точек плоской фигуры: отношение скоростей точек фигуры прямо пропорционально расстоянию от этих точек до МЦС – $\frac{V_A}{V_B} = \frac{AS}{BS}$.

Существует три основных способа определения МЦС:

1 способ. Известно направление и модуль одной скорости точки и направление другой (см. рис. 2.2). Чтобы определить МЦС, нужно провести перпендикуляры к направлениям скоростей. Точка S их пересечения и есть МЦС.

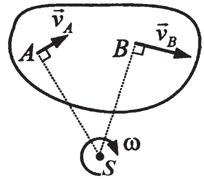


Рис. 2.2

2 способ. Скорости точек известны – V_A и V_B, параллельны, а направление скоростей перпендикулярно отрезку AB. Чтобы определить МЦС, нужно соединить начало скоростей точек A и B и соединить концы скоростей. Точка пересечения S есть МЦС. Возможны варианты: скорости направлены в одну сторону (см. рис. 2.3); скорости направлены в разные стороны (см. рис. 2.4). В этих случаях: $\omega = \frac{V_A}{AS}$, $V_B = \omega \cdot BS$.

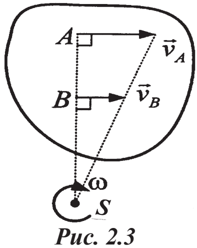


Рис. 2.3

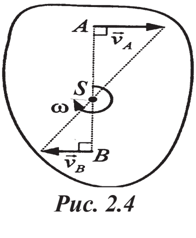


Рис. 2.4

Если скорости равны между собой $V_A = V_B$, а их направление параллельное, то перпендикуляры тоже параллельны между собой, значит, в движении отсутствует вращательная составляющая плоского движения, т. е. плоское движение переходит в поступательное движение (см. рис. 2.5).

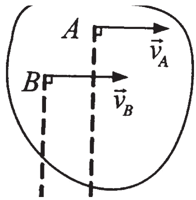


Рис. 2.5

3 способ: через общую точку соприкасающихся тел, одно из которых неподвижно (см. рис. 2.6). Точка *S* соприкосновения тел является МЦС.

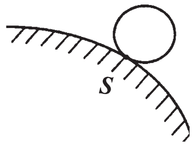


Рис. 2.6

Ускорение точки плоской фигуры можно определить через теорему об ускорении точек плоской фигуры: ускорение точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и вращательного ускорения точки вокруг полюса $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}$.

Сферическим движением твёрдого тела называется такое движение твёрдого тела, при котором все точки тела описывают траектории, лежащие на сферах с одним и тем же неподвижным центром.

Пусть твёрдое тело имеет одну неподвижную точку *O* (см. рис. 2.7). Для определения положения тела в пространстве введём две системы координат: *Oxyz* и $Ox_1y_1z_1$, первая из которых неподвижная, а вторая неизменно связана с телом и перемещается вместе с ним. Начала обеих систем координат совмещены с неподвижной точкой *O*.

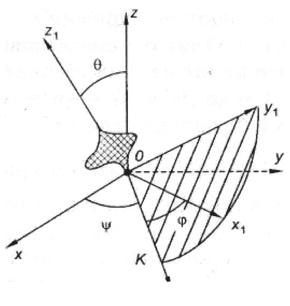


Рис. 2.7

Покажем на рисунке линию пересечения плоскостей $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$. Это линия называется линией узлов (*ОК)*. Положение подвижной системы координат по отношению к неподвижной системе координат определяется тремя независимыми углами. Углы ψ, θ, φ называются эйлеровыми углами; ψ *– угол прецессии,* θ *– угол нутации,* φ *– угол собственного вращения*.

В процессе движения тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени: $\psi= f_1(t)$; $\varphi= f_2(t)$, $\Theta= f_3(t)$. Эти уравнения называются *уравнениями сферического движения тела.*

Кинематическими характеристиками тела при сферическом движении являются угловая скорость и угловое ускорение.

Поскольку при движении тела изменяются все три угла, движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3}$, где $\overline{\omega_1} = \dot{\psi}$, $\overline{\omega_2} = \dot{\varphi}$, $\overline{\omega_3} = \dot{\theta}$. Так как значения $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ изменяются со временем численно и по направлению, то $\overline{\omega}$ называют мгновенной угловой скоростью. Величина угловой скорости $\overline{\omega}$ является величиной переменной и по величине, и по направлению.

Угловым ускорением тела называется величина $\bar{\varepsilon} = \overline{\omega}$. В отличие от вращательного движения, при сферическом движении тела векторы угловой скорости и углового ускорения не лежат на одной прямой.

Поскольку в каждый момент времени происходит поворот тела вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью ω, то скорость точки определяется формулой: $\overline{V} = \overline{\omega} \cdot \bar{r}$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор данной точки, проведённый из неподвижной точки O.

Ускорение точки будет определяться соотношением: $\overline{a} = \overline{a}_{вр} + \overline{a}_{ос} = \overline{\varepsilon} \cdot \overline{r} + \overline{\omega} \cdot \overline{V}$, где $\overline{a}_{вр} = \overline{\varepsilon} \cdot \overline{r}$ – вращательное ускорение, $\overline{a}_{ос} = \overline{\omega} \cdot \overline{V}$ – осестремительное ускорение.

Общий случай движения твёрдого тела – когда тело является полностью свободным. Примером такого движения может быть полёт планеты, самолёта, снаряда и других тел.

Для определения положения тела в пространстве в теле выберем произвольную точку C – полюс. Тогда движение можно описать как: $x_C = f_1(t)$; $y_C = f_2(t)$, $z_C = f_3(t)$, $\psi = f_4(t)$; $\varphi = f_5(t)$, $\Theta = f_6(t)$ – *это уравнения общего случая движения твёрдого тела.*

2.3. Сложное движение точки

Сложным движением точки (тела) называется такое движение точки (тела), при котором она одновременно участвует в двух или более движениях.

При сложном движении точки различают абсолютное, относительное и переносное движение. Движение точки относительно неподвижной системы называется абсолютным движением. Движение точки относительно подвижной системы называется относительным движением. Движение точки вместе с подвижной системой относительно неподвижной называется переносным движением.

Скорость точки определяется при сложном движении по теореме о сложении скоростей: скорость точки при её сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скорости. $\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e$, где $\overline{V}$ – абсолютная скорость, $\overline{V}_r$ – относительная скорость, $\overline{V}_e$ – переносная скорость.

Для того чтобы определить абсолютную скорость по модулю, нужно применять метод проекций, или, если между относительной и переносной скоростями образуется угол α, то можно применить теорему косинусов: $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\alpha}$.

Абсолютное ускорение определяется по теореме сложения ускорения: абсолютное ускорение точки, в случае не поступательного переносного движения, равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений: $\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c$, где $\overline{a}$ – абсолютное ускорение точки, $\overline{a}_r$ – относительное ускорение точки, $\overline{a}_e$ – переносное ускорение точки, a_c – кориолисово ускорение точки.

Кориолисово ускорение равно $\overline{a}_c = 2(\overline{\omega}_c \cdot \overline{V}_r)$, где $\overline{\omega}_c$ – переносная угловая скорость, $\overline{V}_r$ – относительная скорость точки.

Численно кориолисово ускорение можно найти из определения векторного произведения: $\overline{a}_c = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin\beta$, где β – угол между вектором переносной угловой скорости и осью переносного вращения. Из анализа формулы можно сделать вывод, что кориолисово ускорение равно нулю, когда один из множителей будет равен нулю.

Направление кориолисова ускорения определяется правилом Жуковского: чтобы определить направление кориолисова ускорения, нужно спроецировать относительную скорость на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения.

Задание К1
Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

По заданным уравнениям движения точки установить траекторию точки и определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени t_1. Выполнить чертёж траектории и показать на нём скорость и ускорение точки при t_1. Определить радиус кривизны и установить характер движения точки (ускоренное, замедленное, равномерное). Данные взять из табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ условия	Уравнение движения, см $x = f(t)$ или $y = f(t)$	$t_{1,}$ с	№ условия	Уравнение движения, см $x = f(t)$ или $y = f(t)$	$t_{1,}$ с
1	$3\cos(2\pi t)$	0,25	6	$2[1 - 4\sin(\pi t)]$	1,50
2	$3\sin^2(\pi t) - 4$	0,50	7	$3 - 2\cos(\pi t)$	1,75
3	$2\cos^2(\pi t) - 3$	0,75	8	$3[1 - 2\cos^2(\pi t)]$	2,00
4	$-3\cos(2\pi t)$	1,00	9	$2\cos(2\pi t) - 1$	0,75
5	$4 - 2\sin 2(\pi t)$	1,25	0	$2\sin(\pi t)$	0,50

Примечание. Уравнение движения по оси X взять по последней цифре варианта задания (шифра), а момент времени t_1 и уравнение движения по оси Y – по предпоследней цифре задания (шифра).

Пример. По заданным уравнениям движения точки $x = f(t)$ и $y = f(t)$ установить траекторию точки и определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорение точки в момент времени t_1. Определить радиус кривизны и установить характер движения точки (ускоренное, замедленное, равномерное).

Дано: $t_1 = 1$ с, $x = 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$, $y = 16 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 14$.

Определить: уравнение траектории, V, a, a_τ, a_n, ρ.

Решение. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Так как время входит в аргументы тригонометрических функций, то для исключения t используем формулу

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Первое исходное уравнение представим как

$$\frac{x+2}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \text{ или } \left(\frac{x+2}{6}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

а второе исходное уравнение представим в виде

$$\frac{y+14}{16} = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Складывая правые и левые части этих уравнений, получаем

$$\frac{y+14}{16} + \left(\frac{x+2}{6}\right)^2 = 1.$$

После преобразования находим уравнение траектории

$$y = 16 - 16\left(\frac{x+2}{6}\right)^2 - 14 = 2 - 16\left(\frac{x+2}{6}\right)^2,$$

$$y = 2 - 16\left(\frac{x+2}{6}\right)^2 \text{ – парабола.}$$

Скорость точки найдем по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2)' = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (16 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 14)' = \frac{16\pi}{6} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{16\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

при $t = 1$ c получаем значения проекций скоростей $V_x = -1{,}57$ см/с, $V_y = 7{,}25$ см/с, а полную скорость, как $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \left(-\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)\right) = -\dfrac{\pi^2}{6}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ см/с.

Аналогично определим ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \left(-\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' = -\frac{\pi^2}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \left(\frac{16\pi}{6}\cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right) = \frac{16\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

при $t=1$ c получаем $a_x = -1{,}42$ см/с^2, $a_y = 7{,}58$ см/с^2 и полное ускорение $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-1{,}42)^2 + (7{,}58)^2} = 7{,}71$ см/с^2.

Касательное ускорение определим по формуле

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V},$$

тогда при $t = 1$ с, получим: $a_\tau = \dfrac{(-1{,}57)\cdot(-1{,}42) + 7{,}25\cdot 7{,}58}{7{,}42} = 7{,}7$ см/с^2. Знак плюс показывает, что перемещение ускоренное.

Нормальное ускорение определим, используя уже известные значения: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{7{,}71^2 - 7{,}7^2} = 0{,}39$ см/с^2.

Радиус кривизны траектории ρ определим по формуле

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{7{,}42^2}{0{,}39} = 1141{,}17 \text{ см.}$$

Полученную траекторию $y = f(x)$ и найденные вектора скоростей и ускорений изображаем на рис. 2.8 в положении при $t = 1$ с.

Ответ: $V = 7{,}42$ см/с, $a = 7{,}71$ см/с^2, $a_\tau = 7{,}7$ см/с^2, $a_n = 0{,}39$ см/с^2, $\rho = 1141$ см, перемещение точки ускоренное.

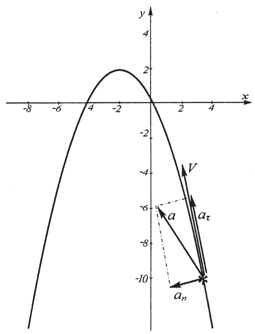


Рис. 2.8

Задание К2
Кинематический анализ плоского механизма

Механическая система в момент времени t занимает положение согласно рис. 2.9. Определить кинематические параметры согласно табл. 2.2 и показать их направление на чертеже, если в момент t угловая скорость одного из элементов представлена как $\omega = f(t)$. При выборе исходных данных из табл. 2.2 ω_1, ω_2, ω_3 при их положительном значении считать вращение по часовой стрелке, при отрицательном значении – против часовой стрелки, значение ω_1 принимать $\omega_1 = \omega_{OA}$.

Таблица 2.2

Вариант	***Исходные данные***							***Найти***	
	r_1, *м*	r_2, *м*	r_3, *м*	$\omega_1=f(t)$, *1/с*	$\omega_2=f(t)$, *1/с*	$\omega_3=f(t)$, *1/с*	t, *с*	***Скорости***	***Ускорения***
1	0,3	0,2	0,1	–	–	$5\sin(\pi t/3)$	1,0	V_K; V_C	a_A; ε_2
2	0,4	0,2	0,15	–	$4t^2$	–	1,0	V_D; ω_{CA}	a_B; ε_1
3	0,2	0,2	0,1	$3t^3$	–	–	0,5	V_H; V_C	a_A; ε_3
4	0,3	0,2	0,15	–	–	$-4\sin(\pi t/6)$	2,0	V_K; ω_{CA}	a_B; ε_1
5	0,4	0,3	0,2	–	$-5t^2$	–	2,5	V_H; V_C	a_A; ε_1
6	0,4	0,2	0,1	$-3t^3$	–	–	1,5	V_D; ω_{CA}	a_B; ε_3
7	0,3	0,2	0,1	$5t^3$	–	–	1,0	V_K; V_C	a_A; ε_2
8	0,3	0,15	0,1	–	$4t^2$	–	3	V_H; ω_{CA}	a_B; ε_1
9	0,5	0,3	0,2	–	–	$4\cos(\pi t/4)$	1,0	V_D; V_C	a_A; ε_2
0	0,5	0,4	0,3	$-5t^3$	–	–	0,5	V_H; ω_{CA}	a_B; ε_3

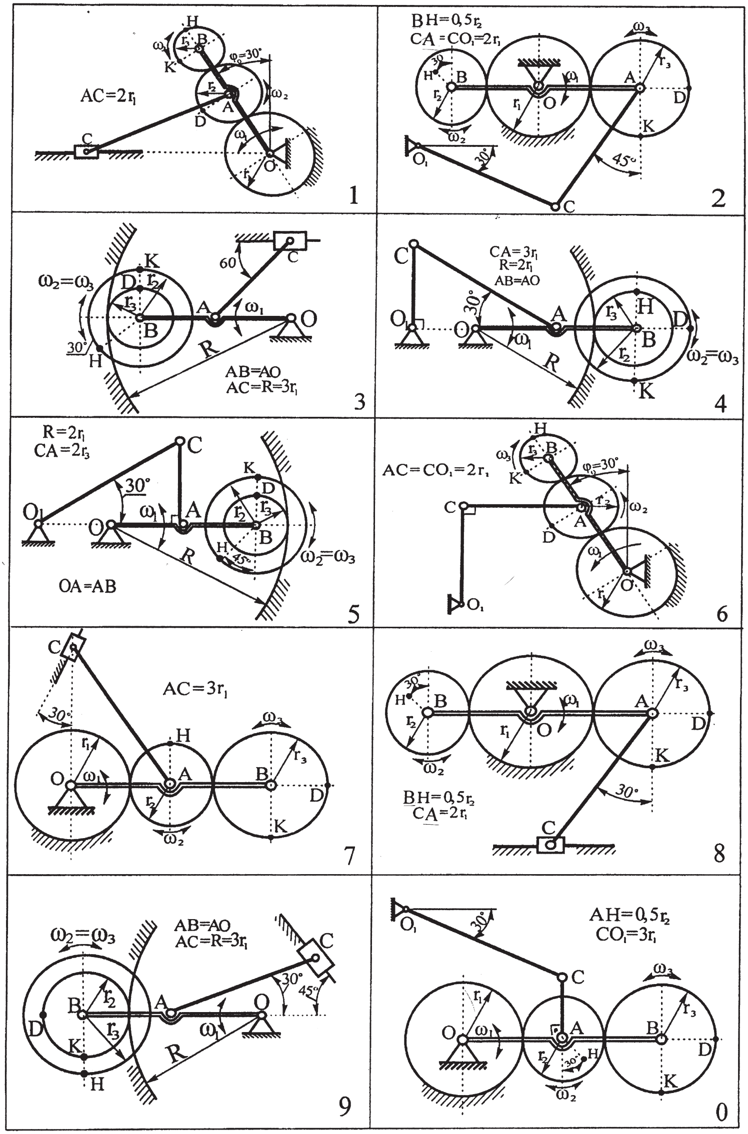

AC=2r₁
1
BH=0,5r₂
CA=CO₁=2r₁
2
AB=AO
AC=R=3r₁
3
CA=3r₁
R=2r₁
AB=AO
4
R=2r₁
CA=2r₃
OA=AB
5
AC=CO₁=2r₁
6
AC=3r₁
7
BH=0,5r₂
CA=2r₁
8
AB=AO
AC=R=3r₁
9
AH=0,5r₂
CO₁=3r₁
0

Рис. 2.9

Пример. В момент времени $t = 1$ *с* механическая система занимает положение согласно рис. 2.10, причём в данный момент $\omega_3 = 4t^2$.

Дано: $r_1 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $r_3 = 0{,}25$ м, $CB = 0{,}6$ м.

Определить для данного положения: скорости V_A, V_D, V_H, V_C, ω_2, ω_{CB} и ускорения a_B, ε_2.

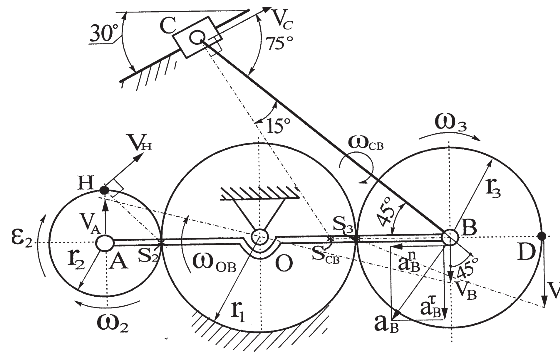


Рис. 2.10

Решение. Определяем скорость точки *D*. Механическая система состоит из четырёх тел, совершающих следующие движения: тело *1* неподвижно, к нему присоединено водило *AOB*, вращающееся вокруг оси, проходящей через точку *O*, тела *2* и *3* и ползун *C* совершают плоское движение. Если известно $\omega_3 = 4t^2$, то тогда $V_B = \omega_3 r_3 = 4t^2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2\ t^2$, т. к. мгновенный центр скоростей (МЦС) тела 3 будет находиться в точке контакта поверхностей тела *1* и *3* – S_3. Кроме этого телу *3* принадлежит точка *D*, тогда через его центр скоростей S_3 можно определить и скорость точки *D*, взяв соотношение

$$\frac{V_D}{V_B} = \frac{2r_3}{r_3} = 2\text{, или } V_D = 2V_B = 2 \cdot 1{,}2t^2 = 2{,}4t^2.$$

Определяем скорость V_A. Точки A и B водила AOB вращаются вокруг точки O. Тогда согласно свойства скоростей точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно составить пропорцию:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{OA}{OB} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_3} = \frac{0{,}3 + 0{,}1}{0{,}3 + 0{,}25} = \frac{0{,}4}{0{,}55} = 0{,}73$$

и тогда

$$V_A = 0{,}37 \cdot V_B = 0{,}73 \cdot 2{,}4\, t^2 = 0{,}873\, t^2.$$

Находим скорости V_H и ω_2. Скорость V_H можно определить через мгновенный центр скоростей тела *2*, который расположен в точке контакта поверхностей тела *2* и *1* в точке S_2. Тогда угловая скорость тела будет определяться по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{0{,}873t^2}{0{,}1} = 8{,}73t^2.$$

Чтобы найти скорость точки H, применим свойства скоростей точек плоской фигуры и МЦС, т. е. «отношение скоростей точек плоской фигуры равно отношению расстояниям от этих точек от МЦС», значит

$$\frac{V_A}{V_H} = \frac{AS_2}{HS_2} = \frac{r_2}{r_2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } V_H = V_A\sqrt{2} = 1{,}23t^2.$$

Определим скорость точки С, принадлежащей ползуну, применив теорему о проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проведённую через эти точки: «проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проведённую через эти точки, равны», т. е.

$$V_C \cos 75° = V_B \cos 45° \text{ или } V_C = \frac{V_B \cos 45°}{\cos 75°} = \frac{1{,}2t^2 \cos 45°}{\cos 75°} = 3{,}26t^2.$$

Установив предварительно положение МЦС стержня CB, который находится на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей шарниров C и B (точка S_{CB}), определяем угловую скорость стержня CB:

$\omega_{CB} = \dfrac{V_B}{BS_{CB}}$, где BS_{CB} можно найти по теореме синусов, составив отношение для треугольника ΔCBS_{CB} $\dfrac{CB}{\sin 120°} = \dfrac{BS_{CB}}{\sin 15°} = \dfrac{CS_{CB}}{\sin 45°}$. Откуда получим $SB = \dfrac{CB \cdot \sin 15°}{\sin 120°} = 0{,}2$ м. Следовательно $\omega_{CB} = \dfrac{1{,}2t^2}{0{,}2} = 6t^2$.

Определяем ускорение точки B согласно векторному уравнению $\overline{a}_B = \overline{a}_B{}^{\tau} + \overline{a}_B{}^{n}$, где его составляющие равны $a_B{}^{\tau} = \dfrac{dV_B}{dt} = (1{,}2t^2)' = 2{,}4t$, $a_B{}^{n} = \dfrac{V_B{}^2}{OB} = \dfrac{(1{,}2t^2)}{r_1 + r_3} = \dfrac{1{,}44t^4}{0{,}55} = 2{,}62t^4$.

Тогда $a_B = \sqrt{(a_B{}^{\tau})^2 + (a_B{}^{n})^2} = \sqrt{(2{,}4t)^2 + (2{,}62t^4)^2}$.

Угловое ускорение ε_2 определим как

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = (8{,}73t^2)' = 17{,}46t.$$

Определив кинематические зависимости между точками и телами механической системы, найдём искомые величины при заданном времени: $t = 1$ с: $V_A = 0{,}873 \cdot 1^2 = 0/873$ м/с; $V_D = 2{,}4 \cdot 1^2 = 2{,}4$ м/с; $V_H = 1{,}23 \cdot 1^2 = 1{,}23$ м/с; $V_C = 3{,}26 \cdot 1^2 = 3{,}26$ м/с; $\omega_2 = 8{,}73 \cdot 1^2 = 8{,}73$ с$^{-1}$; $\omega_{CB} = 6 \cdot 1^2 = 6$ с$^{-1}$; $a_B = \sqrt{(2{,}4 \cdot 1)^2 + (2{,}62 \cdot 1^4)^2} = 3{,}553$ м/с^2; $\varepsilon_2 = 17{,}46 \cdot 1^2 = 17{,}46$ с$^{-2}$.

Ответ: $V_A = 0/873$ м/с; $V_D = 2{,}4$ м/с; $V_H = 1{,}23$ м/с; $V_C = 3{,}26$ м/с; $\omega_2 = 8{,}73$ с$^{-1}$; $\omega_{CB} = 6$ с$^{-1}$; $a_B = 3{,}553$ м/с^2; $\varepsilon_2 = 17{,}46$ с$^{-2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает раздел теоретической механики «Кинематика»?

2. Что называется законом движения точки?

3. Что представляет собой траектория точки?

4. Какое движение тела называется плоским или плоскопараллельным движением?

5. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

6. Что характеризуют собой касательное и нормальное ускорения точки?

7. Перечислите основные виды движения твёрдого тела.

8. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?

9. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей (МЦС) и каковы основные случаи определения его положения?

10. Какими параметрами определяется положение твёрдого тела, одна из точек которого неподвижна?

11. Какие движения называются абсолютным, переносным, относительным?

12. Как определить по модулю кориолисово ускорение?

13. В каких случаях кориолисово ускорение равно нулю?

3. ДИНАМИКА

3.1. Основные понятия и законы

Динамикой называют раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Система отсчёта. При многих технических расчётах можно принимать за неподвижную всякую систему, неизменно связанную с Землей. Систему отсчета, по отношению к которой всякая материальная частица под действием взаимно уравновешенных сил совершает прямолинейное и равномерное движение, называют инерционной системой отсчета.

Основные законы динамики.

1. Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения. Ускорение ($\overline{a}$) материальной точки массой m пропорционально приложенной к ней силе ($\overline{P}$) и имеет одинаковое с ней направление: $m\overline{a} = \overline{P}$.

3. Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. Закон независимости действия сил. Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме: $m\overline{a} = \sum\overline{P}_i$.

Масса. Массой материальной частицы (тела) называют меру её инертности, численно выражающуюся отношением модуля силы, действующей на частицу (тело), и вызванного ею ускорения. Масса материальной точки (тела) (m) численно равна отношению её веса (G) к ускорению свободного падения (g): $m=G/g$.

Система механических единиц. Существует две системы механических единиц: *техническая* (МКГСС), в которой основными единицами являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы в этой системе будет 1 кГ·с^2/м, т. е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с^2 и *физическая* (Международная система единиц СИ), в которой основными единицами измерения механических величин являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единица измерения силы – производная единица – 1 ньютон (Н). 1 Н – это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2 (1 Н = 1 кг·м/с^2). Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГСС: 1 кГ = 9,81 Н или 1 Н = 0,102 кГ.

Классификация сил. Силы, действующие в материальной системе, подразделяют на внешние (F^e) и внутренние (F^j) или активные и реакции связей. Кроме того при решении задач динамики рассматривают следующие постоянные или переменные силы:

– *сила тяжести.* Это постоянная сила G, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела. Под действием силы G любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение g, называемое ускорением свободного падения, а иногда ускорением силы тяжести. Значение g в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На уровне моря g = 9,8156 м/с^2. Из второго уравнения динамики следует, что $G = mg$ или $m = G/g$;

– *сила трения.* Так называется сила трения скольжения, действующая (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Её модуль определяется равенством $F = fN$, где f – коэффициент трения, который считают постоянным; N – нормальная реакция.

– *сила упругости.* Эта сила зависит от положения тела. В частности, для силы упругости пружины $P = c \cdot \lambda$, где λ – удлинение (или сжатие) пружины; c – коэффициент жёсткости пружины (в системе СИ измеряется в Н/м).

– *сила вязкого трения.* Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством $R = \mu \cdot V$, где V – скорость тела; μ – коэффициент сопротивления.

– *сила инерции.* Такой силой называют геометрическую сумму сил противодействия движущейся материальной частицы телам, сообщающим ей ускорение, т. е. $\overline{\Phi} = -m\overline{a}$.

3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В зависимости от способов задания движения точки дифференциальные уравнения могут быть:

– *в векторной форме*

$$m\overline{a} = \overline{P} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = m\frac{d\overline{V}}{dt};$$

– *в проекциях на оси декартовой системы координат*

$$m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dt} = P_x;\; m\ddot{y} = m\frac{d\dot{y}}{dt} = P_y;\; m\ddot{z} = m\frac{d\dot{z}}{dt} = P_z.$$

– *в проекциях на естественные оси координат:*

$$ma_n = m\frac{V^2}{\rho} = P_n,$$

$$ma_\tau = m\frac{d^2 s}{dt^2} = m\frac{dV}{dt} = P_\tau.$$

Дифференциальные уравнения движения *несвободной точки* в векторной форме

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N};$$

в координатной форме

$$m\ddot{x} = P_x + N_x;\ m\ddot{y} = P_y + N_y;\ m\ddot{z} = P_z + N_z,$$

где N – равнодействующая реакций связей.

Дифференциальные уравнения *относительного движения* точки в векторной форме:

$$m\overline{a}_r = \overline{P} - m\overline{a}_e - m\overline{a}_c,$$

где a_e – ускорение переносного движения; a_r – относительное ускорение; a_c – ускорение Кориолиса.

Две основные задачи динамики точки.

Первая задача – зная массу точки и уравнения её движения, найти равнодействующую приложенных к точке сил. Если известен закон движения точки в векторной форме $\overline{r} = \overline{r}(t)$, тогда $\overline{a} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$. Из основного уравнения динамики определяем силу $\overline{P} = m\overline{a}$.

Вторая задача – зная приложенные к точке силы, а также её массу m, начальные положения и скорость, определить закон движения точки. Общий ход решения: составляют дифференциальные уравнения движения, дважды интегрируют, определяют постоянные интегрирования из начальных условий и получают закон движения точки.

Примерный алгоритм решения второй основной задачи динамики точки.

1. Выбрать начало отсчёта (как правило, совмещая его с начальным положением точки).

2. Провести координатные оси, направляя их, как правило, в сторону движения.

3. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но чтобы $x > 0, y > 0, z > 0$).

4. Приложить к точке все действующие на неё силы.

5. Записать основное уравнение динамики применительно к данной задаче в векторном виде.

6. Спроектировать векторное уравнение на выбранные оси, то есть записать дифференциальные уравнения движения точки.

7. Преобразовать дифференциальные уравнения к виду, удобному для интегрирования.

8. Записать начальные условия.

9. Дважды проинтегрировать дифференциальные уравнения и получить их общие решения.

10. Определить постоянные интегрирования.

11. Записать частные решения дифференциальных уравнений, то есть подставить постоянные интегрирования в их общие решения.

12. Найти искомые в задаче величины или исследовать полученный результат.

3.3. Прямолинейные колебания точки

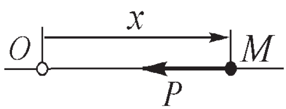


Рис. 3.1

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку M, отклонённую от положения покоя O (см. рис. 3.1), действует сила P, стремящаяся вернуть точку в это положение. Сила P называется восстанавливающей. Примером такой силы является сила упругости пружины.

Большое практическое значение имеет случай, когда сила P пропорциональна отклонению, т. е. $P = -c \cdot x$, где с – коэффициент жёсткости упругого элемента, размерность: Н/м.

Восстанавливающая сила стремится вернуть точку в равновесное положение O.

Различают четыре основных случая колебательного движения материальной точки: свободные колебания (протекают только под действием восстанавливающей силы); затухающие колебания (совершаются под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления); вынужденные колебания (под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой возмущающей силой); вынужденные колебания с учётом сил сопротивления.

Свободные колебания материальной точки. Дифференциальное уравнение свободных колебаний точки массой m имеет вид: $\ddot{x} + k^2 x = 0$, где $k^2 = c/m$, или при вертикальных колебаниях $k^2 = g / f_{cm}$, f_{cm} – статическая деформация упругого элемента, а общее решение этого уравнения: $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, где $C_1 = x_0$ и $C_2 = \dot{x}_0/k$ – постоянные интегрирования. Здесь x_0 и $\dot{x}_0$ – начальное положение и начальная скорость точки. Общее уравнение можно также представить в виде гармонических колебаний $x = A\sin(kt + \beta)$, где $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}$ – амплитуда колебаний; $\beta = \operatorname{arctg}(kx_0/\dot{x}_0)$ – начальная фаза колебаний; k – круговая (циклическая) частота колебаний.

Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется периодом колебаний и определяется по формуле $T = 2\pi/k$, а величина $\nu=1/T$ – обратная периоду колебаний – называется частотой колебаний и измеряется в герцах (Гц).

Затухающие колебания. В реальных условиях материальная точка, совершающая колебательные движения, испытывает сопротивление движению. Практическое значение имеет случай, когда сила сопротивления R пропорциональна скорости, т. е. $\overline{R} = -\mu\overline{V}$. Если ввести обозначения $\mu/m = 2n$ и $c/m = k^2$, то можно получить дифференциальное уравнение затухающих колебаний вдоль оси x в следующем виде: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$. Интегрирование этого уравнения приводит к общему решению для случая $n<k$: $x = e^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2+n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2+n^2}\,t\right)$ или $x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2+n^2}\,t+\beta)$, где C_1; C_2; A; β – постоянные интегрирования.

Движение материальной точки теряет колебательный характер и становится апериодическим в случае большого сопротивления, т. е. при $n \geq k$. При $n > k$ решение принимает вид $x = Ae^{-nt}sh(\sqrt{n^2+k^2}\,t+\beta)$, а при $n=k$ получаем $x = e^{-nt}(C_1t + C_2)$ или $x = e^{-nt}[x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]$.

Вынужденные колебания (без учёта сопротивления). Такие колебания совершает материальная точка, на которую наряду с восстанавливающей силой действует периодически изменяющаяся сила, называемая возмущающей силой. Практически важным является случай, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону, т. е. проекция её на ось x, направленную по траектории точки, определяется как: $Q_x = H\sin(pt + \delta)$, где H – максимальный модуль, или амплитуда возмущающей силы; p – частота изменения возмущающей силы; δ – начальная фаза.

Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае будет $m\ddot{x} = -cx - H\sin(pt + \delta)$ или $\ddot{x} + k^2x = h\sin(pt + \delta)$, где обозначено $k^2 = c/m$, $h = H/m$. Общее решение имеет вид $x = A\sin(kt + \beta) + \dfrac{h}{k^2 - h^2}\sin(pt + \delta)$. Из решения видно, что колебания точки слагаются из: собственных колебаний с амплитудой A и частотой k; вынужденных колебаний с амплитудой $B = h/(k^2 - p^2)$и частотой p.

Резонанс. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления, когда $p \approx k$ (частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний), называются резонансом. Это явление описывается уравнением $x = (h/2k) \cdot t \times$ $\times \sin(pt - \pi/2)$. Амплитуда этих колебаний $B = ht/2p$ с течением времени неограниченно возрастает.

3.4. Геометрия масс

Центр масс механической системы. Центр масс системы точек в векторной форме определяется как

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m},$$

в координатной форме:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m},$$

где $m = \sum m_i$ – масса системы; x_i, y_i, z_i – координаты масс m_i.

Моменты инерции характеризуют распределение масс в телах при их вращательном движении. Выделяют осевые, полярные и центробежные моменты инерции. Более наглядно их можно представить для плоских фигур в системе координат xOy (см. рис. 3.2).

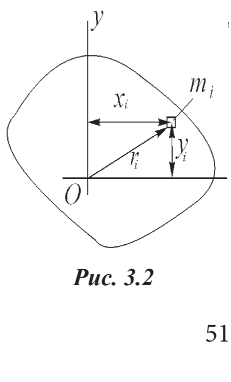


Рис. 3.2

Осевые моменты инерции:

$J_x = \sum m_i y_i^2$; $J_y = \sum m_i x_i^2$.

Полярный момент инерции:

$J_0 = \sum m_i \bar{r}_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$ или

$J_0 = J_x + J_y$.

Центробежный момент инерции:

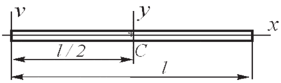
$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i$.

Если центробежные моменты инерции равны нулю, то оси этой системы координат называют главными осями инерции. Если ось проходит через центр масс, то ось называется центральной.

Моменты инерции простейших тонких однородных тел

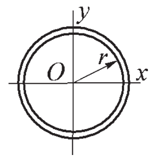
Стержень массой, *m:*

$$J_v = \frac{ml^2}{3};\ J_{yC} = \frac{ml^2}{12}.$$



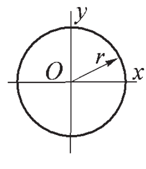
Тонкое кольцо (обруч) массой, *m:*

$$J_a = mr^2;\ J_x = J_y = \frac{mr^2}{2}.$$



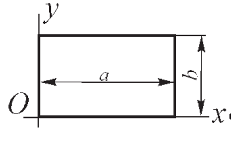
Круглый диск массой, *m:*

$$J_o = \frac{mr^2}{2};\ J_x = J_y = \frac{mr^2}{4}.$$



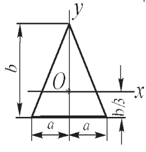
Прямоугольная пластина:

$$J_x = \frac{mb^2}{3};\ J_y = \frac{ma^2}{3}.$$



Треугольник:

$$J_x = \frac{mb^2}{18};\ J_y = \frac{ma^2}{6}.$$



3.5. Общие теоремы динамики точки и системы

Количество движения точки и системы. Мерой движения материальной точки или механической системы является количество движения. Для точки это вектор, равный произведению массы точки m на вектор её скорости: $\overline{K} = m\overline{V}$, для механической системы: $\overline{K} = \sum m_i \overline{V}_i$ или через центр масс: $\overline{K} = m\overline{V}_C$, где m – масса механической системы, $\overline{V}_C$ – скорость центра масс.

В проекциях на оси декартовой системы координат эту меру движения можно представить как: $\overline{K} = K_x\overline{i} + K_y\overline{j} + K\overline{k}_z$, где $K_x = m\dot{x}$, $K_y = m\dot{y}$, $K_z = m\dot{z}$.

Импульс силы есть мера её действия во времени и характеризует передачу материальной точки механического движения со стороны действующих на неё тел за данный промежуток времени. Определяется как вектор, равный произведению силы на время: для постоянной силы – $\overline{S} = \overline{P}t$ для переменной силы за промежуток времени t_1–t_2 – $\overline{S} = \int_{t1}^{t2} \overline{P}\,dt$.

Количество движения и импульс силы измеряются в одинаковых единицах, связь между ними устанавливают две теоремы.

Теорема об изменении количества движения материальной точки: изменение количества движения материальной точки за какой-либо промежуток времени (например, от t_1 до t_2) равно импульсу силы, действующей на точку за тот же промежуток времени: $m\overline{V}_2 - m\overline{V}_1 = \overline{S}$ или в проекциях, например, на ось x: $m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = S_x$.

Теорема об изменении количества движения механической системы: изменение количества движения механической системы ($\overline{K} = \sum m_i \overline{V}_i$) за какой-либо промежуток времени (например, от t_1 до t_2) равно геометрической сумме импульсов внешних сил ($\overline{S}_i^e$), приложенных к системе за тот же промежуток времени: $\overline{\text{K}}_2 - \overline{\text{K}}_1 = \sum\overline{S}_i^e$. Аналогично предыдущей теореме, эту зависимость можно представить в проекциях.

Следствия из теоремы. Если векторная сумма всех внешних сил (главный вектор) за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то количество движения механической системы постоянно. Подобное заключение справедливо и для проекций на неподвижную ось.

Теорема о движении центра масс. Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы: $m\ddot{x}_C = \sum P_{xi}^e$; $m\ddot{y}_C = \sum P_{yi}^e$; $m\ddot{z}_C = \sum P_{zi}^e$. В векторной форме: $m\overline{a}_C = \sum\overline{P}_i$.

Следствия из этой теоремы. Если векторная сумма внешних сил всё время равна нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Аналогично и для проекций сил и центра масс на какую-либо неподвижную ось.

Момент количества движения. Это динамическая характеристика механического движения, учитывающая положение материальной точки по отношению к данному центру и выражается векторным произведением радиус-вектора и количества движения материальной точки: $\overline{L}_0 = \overline{r} \cdot m\overline{V}$, а модуль вектора $\overline{L}_0$ равен произведению величины mV на плечо h вектора $m\overline{V}$ относительно центра O: $L_0 = mVh$ или в координатной форме $L_0 = m(y\dot{x} - x\dot{y})$. Момент количества движения относительно оси z равен произведению проекции вектора $m\overline{V}$ на плоскость, перпендикулярную оси z, на плечо h_i этой проекции до оси: $L_z = mV_ih_i$.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра, т. е. $\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O$.

Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Кинетическим моментом (или главным моментом количества движения механической системы относительно центра, например, точки *O*) называют вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра: $\overline{L}_0 = \sum \overline{L}_{i0} = \sum \overline{r}_i \cdot m_i \overline{V}_i$ а относительно оси – берётся алгебраическая сумма: $L_z = \sum L_{iz}$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил $\overline{M}_O^e$, действующих на эту систему, относительно того же центра, т. е. $\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{M}_{iO}^e = \overline{M}_O^e$ или в проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_{ix}^e = M_x^e; \qquad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_{iy}^e = M_y^e; \qquad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^e = M_z^e.$$

Следствие из теоремы. Если главный момент внешних сил относительно некоторого неподвижного центра остаётся всё время равным нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остаётся постоянным.

Две меры механического движения. В динамике рассматриваются две формы преобразования механического движения материальной точки или системы точек:

1) Механическое движение переносится с одной механической системы на другую в качестве механического дви-

жения. В этом случае мерой механического движения является вектор количества движения точки $\overline{\mathrm{K}} = m\overline{V}$ или механической системы $\overline{\mathrm{K}} = m\overline{V}_C$, а мерой действия силы выступает импульс силы $\overline{\mathrm{S}}$.

2) Механическое движение превращается в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества т. д.). Здесь мерой движения выступает кинетическая энергия, а мерой действия силы является работа силы.

Кинетическая энергия точки и системы. Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы m точки на квадрат её скорости V: $T = \frac{mV^2}{2}$. Кинетической энергией системы называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы, т. е. $T = \sum T_i = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}$.

При поступательном движении тела (см. рис. 3.3) скорости всех точек одинаковые, $V_i = V$, поэтому $T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{V^2}{2}\sum m_i = \frac{mV^2}{2}$, где m – масса тела.

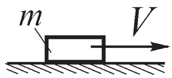


Рис. 3.3

При вращении тела вокруг неподвижной оси скорость какой-либо точки тела можно выразить как $V_i = \omega r_i$, где r_i – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения; ω – угловая скорость тела (см. рис. 3.4).

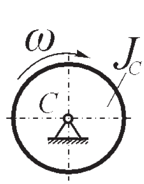


Рис. 3.4

Тогда кинетическая энергия тела: $T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i r_i^2 = \frac{J_C \omega^2}{2}$, где $J_C = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно центра вращения точки C.

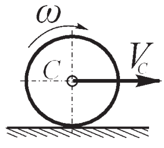


Рис. 3.5

При плоском движении тела (см. рис. 3.5): $T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_{zC}\omega^2}{2}$ где V_C – скорость центра масс;

J_{zC} – момент инерции тела относительно центральной оси z, проходящей через центр масс.

Работа силы. Работу постоянной силы при прямолинейном движении выражают произведением модуля силы на величину перемещения материальной частицы s и на косинус угла между направлением силы и перемещением: $A = Ps \cos \alpha$ Единица работы джоуль (Дж=Н·м).

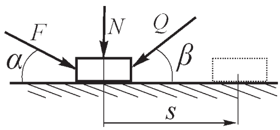


Рис. 3.6

Работа силы F (см. рис. 3.6): $A_F = Fs \cos \alpha$ (F – движущая сила);

Работа силы Q: $A_Q = -Qs \cos \beta$ – (Q – сила сопротивления);

Работа силы N: $A_N = 0$, так как $\alpha = 90^o$.

Элементарная работа силы. Если сила переменная, например, $P = f(s)$, или движение криволинейное, то вводят понятие элементарной работы: $dA = \overline{P}d\overline{r} = Pds \cos(\overline{P}, \overline{V}) = \overline{P}\overline{V}dt$. Элементарная работа связана с проекциями силы на оси координат как $dA = Xdx = Ydy + Zdz$. Работа на конечном пути от s_1 до s_2 равна сумме элементарных работ $A = \int_{s1}^{s2} P\cos(\overline{P},\overline{V})\cdot ds = \int_{s} P_\tau dt$.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Элементарная работа силы, приложенной к телу, закреплённому на неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на бесконечно малый угол поворота: $dA = Md\varphi$. Работа силы, действующей на тело при его повороте на угол от φ_1 до φ_2: $A = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} Md\varphi$. При $M=const$: $A=M\varphi$, (угол в радианах).

Работа силы тяжести. Эта работа не зависит от вида траектории центра тяжести, а зависит от изменения его положения по высоте и равна произведению веса тела G на изменение высоты центра тяжести h: $A_G = \pm Gh$.

Работа силы упругости. Работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жёсткости c на квадрат деформации λ: $A = \frac{c\lambda^2}{2}$.

Работа внутренних сил на любом перемещении тела равна нулю.

Мощность силы. Изменение работы силы, отнесённое к единице времени, называют мощностью силы: $N = \frac{dA}{dt} = \frac{\overline{P}\,d\overline{r}}{dt} = \overline{P} \cdot \overline{V}$. Если направление силы $\overline{P}$ и скорости $\overline{V}$ совпадают, то $N=PV$. Для момента силы: $N=M\omega$.

За единицу мощности в системе СИ принимают 1 ватт (Вт) = 1 Дж/с = 0,102 кгс·м/с. В системе МКГСС за единицу мощности принимают 1 кгс·м/с. Кроме того, принимают следующие единицы мощности: 1 киловатт (кВт) = 10^3 Вт = = 102 кгс·м/с = 1,36 лошадиной силы (л. с.); 1 лошадиная сила = 75 кгс·м/с = 736 Вт.

Сравнение структуры формул динамики для поступательного и вращательного движения твёрдого тела (см. табл. 3.1)

Таблица 3.1

Динамические меры	***Виды движения***	
	Поступательное	***Вращательное***
Уравнение движения	$P = ma$	$M = J\varepsilon$
Работа	$A=Ps$	$A=M\varphi$
Мощность	$N=PV$	$N=M\omega$
Кинетическая энергия	$T = mV^2/2$	$\mathrm{T} = \mathrm{J}\omega^2/2$

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки: изменение кинетической энергии материальной точки на некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении: $T - T_0 = A$ или $\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \sum A_i$, где T и T_0 – кинетическая энергия в конце и начале пути; V_1 и V_2 – скорости точки в начале и конце перемещения.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы: изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении, т. е.

$$\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2}\right)_2 - \left(\frac{\sum m_i V_i^2}{2}\right)_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^j,$$

где $\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2}\right)_1$ – кинетическая энергия системы в первом её положении; $\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2}\right)_2$ – кинетическая энергия системы во втором положении; $\sum A_i^e$ – работа внешних сил; $\sum A_i^j$ – работа внутренних сил. Таким образом,

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^j.$$

Сумма работ внутренних сил твёрдого тела на любом перемещении равна нулю $\sum A_i^j = 0$, следовательно, для твёрдого тела последнее уравнение принимает вид $T_2 - T_1 = \sum A_i^e$.

3.6. Потенциальная энергия

Силовое поле и силовая функция. Область, в каждой точке которой на помещённую туда частицу действует сила, зависящая от положения (координат) этой точки, называется силовым полем. Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется стационарным.

Если существует такая функция $U = U(x, y, z)$, однозначно зависящая от координат точек системы, через которую проекции силы на координатные оси в каждой точке поля выражаются как $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$, то такое стационарное силовое поле называют потенциальным, а функцию U – силовой. Вычислив элементарную работу силы такого поля, получаем $dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$. Отсюда видно, если силовое поле является потенциальным, элементарная работа сил в этом поле равна полному дифференциалу силовой функции, т. е. $dA=dU$. Работа сил поля на конечном перемещении точек механической системы из положения *1* в положение *2* определится как $A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} dU = U_2 - U_1$, т. е. работа сил, действующих на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы и не зависит от формы траектории точек этой системы.

Потенциальная энергия (Π) системы в любом данном её положении равна сумме работ сил потенциального силового поля, приложенных к её точкам на перемещении системы из данного положения в нулевое. Значит $A_{1-0} = U_0 - U_1 = \Pi$. Это равенство показывает, что потенциальная энергия системы Π отличается от силовой функции U, взятой со знаком минус, на постоянную величину U_0. Если $U_0=0$, то $\Pi = -U = A_{1-0}$.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести. В координатной системе xyz для силы тяжести имеем $X=0$, $Y=0$, $Z=-G$. Следовательно $dA = Xdx + Ydy + Zdz = -Gdz = dU$. Интегрируя, получаем $U = -\int_0^h Gz = -Gh$ или $\Pi=Gh$, где h – высота поднятого тела весом G.

Потенциальная энергия упругих элементов. Упругая деформация тел обладает потенциальной энергией. Если, например, пружина сжата (или растянута) на величину λ, то при переходе её в ненапряжённое состояние сила упругости может совершить работу $A = \frac{c\lambda^2}{2}$. Эта способность сжатой (растянутой) пружины совершать работу является потенциальной энергией пружины.

Закон сохранения механической энергии. При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, энергетические изменения определяются зависимостями: $T - T_0 = \sum A_i = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi$, откуда $T + \Pi = T_0 + \Pi_0$, или $T + \Pi = \text{const}$. Это означает, что при движении механичеескй системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы при движении остается неизменной. Величина Т+П называется полной механической энергией, а система, для которой выполняется закон сохранения механической энергии, – консервативной системой.

3.7. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Выше показано, что для вращающейся точки вокруг оси z с угловой скоростью ω момент количества движения равен $L_{iz} = m_i V_i \cdot r_i = m_i r_i^2 \omega$, а кинетический момент L_z твёрдого тела относительно той же оси определяется как $L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega J_z = \dot{\varphi} J_z$, где J_z – момент инерции этого тела относительно оси z. Так как $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^e = M_z^e$, тогда $\frac{d(J_z \dot{\varphi})}{dt} = M_z^e$ или $J_z \ddot{\varphi} = M_z^e$. Здесь $M_z^e = \sum M_{iz}^e$ – главный момент внешних сил относительно оси z.

Уравнение $J_z \ddot{\varphi} = M_z^e$ представляет собой дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Сравним это уравнение с дифференциальным уравнением поступательного движения твёрдого тела, например, вдоль оси x: $m\ddot{x} = X$. Очевидно, что момент инерции твёрдого тела при вращательном движении имеет то же значение, что и масса тела при его поступательном движении: момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.

По дифференциальному уравнению вращения тела можно решать следующие задачи:

1) по заданному уравнению вращения $\varphi = f(t)$ и его моменту инерции J_z определять главный момент внешних сил, действующих на тело;

2) по заданным внешним силам, приложенным к телу, по начальным условиям φ_0 и ω_0 и по моменту инерции тела J_z находить уравнение вращения тела $\varphi = f(t)$;

3) определять момент инерции тела J_z относительно оси вращения, зная величины M_z^e и $\ddot{\varphi}$.

3.8. Основные положения из теории удара

Ударом называют кратковременное взаимодействие тел, вызывающее за ничтожно малый промежуток времени резкое изменение скоростей их точек.

Если удар прямой и центральный (т. е. ударный импульс S проходит через центр масс и скорости точек перпендикулярны к поверхности соприкосновения тел), то для двух тел (см. рис. 3.7) импульс на стадии а) → б) для каждого тела с массами m_1 и m_2 примет вид: $m_1(U - V_1) = -S$, $m_2(U - V_2) = +S$. Отсюда определяется импульс $S = \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2}$ и скорость тел – $U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$.

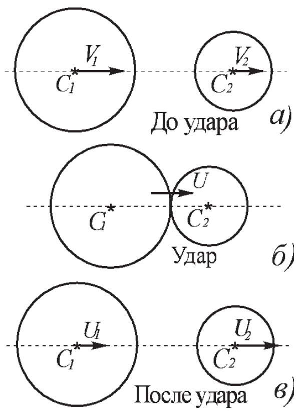


Рис. 3.7

Удар по схеме а) →б) протекает для абсолютно жёстких тел и считается неупругим. Конечная скорость тел в этом случае U. Для упругих тел процесс удара протекает по схеме а) →б) →в) и в результате тела получают конечные скорости U_1 и U_2. На стадии б) → в) получаем: $m_1(U_1 - U) = -kS$, $m_2(U_2 - U) = +kS$ где $k = \frac{|U_1 - U_2|}{|V_1 - V_2|}$ – коэффициент восстановления и его величина зависит от упругих свойств соударяющихся тел. Так как внутренние силы не изменяют количества движения системы, то за всё время удара оно остаётся неизменным, т. е. $m_1V_1 + m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2$.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе: изменение кинетического момента механической системы $(\overline{L}_O - \overline{L}_O^0)$ относительно любого неподвижного центра при ударе равно геометрической сумме моментов всех внешних ударных импульсов $\sum \overline{M}_O(\overline{S}_i^e)$, приложенных к точкам системы относительно того же центра. Для тела, вращающегося вокруг оси z, эта зависимость имеет вид: $L_z - L_z^o = \sum M_z(\overline{S}_i^e)$.

3.9. Аналитическая механика

Классификация связей:

– *голономные* – это связи, при которых их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащем производных от координат;

– в противном случае связи называют *неголономными*;

– если уравнение связи не содержит в явном виде время, то она называется *стационарной*;

– в противном случае – *нестационарной*;

– связи, которые описываются с помощью уравнения, называются *удерживающими* (двухсторонними);

– связи, которые описываются с помощью неравенств, называются *неудерживающими* (односторонними).

Число независимых между собой вариаций координат точек (возможных перемещений) механической системы называется *числом степеней свободы* системы.

Обобщённые координаты механической системы – это независимые величины, заданием которых однозначно определяются положения всех точек системы. Для голономных систем число независимых обобщённых координат (j) механической системы равно числу степеней свободы этой системы.

Принципы механики.

Принцип Даламбера для материальной точки: геометрическая сумма всех приложенных к точке сил $\overline{P}_i$ и силы инерции $\overline{\Phi}$ этой точки равны нулю, т. е. $\sum\overline{P}_i + \overline{\Phi}$. Здесь уравнениям динамики по форме придаётся вид уравнений статики.

Принцип Даламбера для несвободной механической системы: в любой момент времени для всякой механической системы геометрическая сумма всех внешних сил, реакций связей и сил инерции равна нулю, т. е. $\sum\overline{P}_i + \sum\overline{R}_i + \sum\overline{\Phi}_i = 0$. Аналогично и для моментов, например, относительно оси z: $M_{iz}^{(e)} + M_{iz}^{(\phi)} + M_{iz}^{(R)} = 0$.

Принцип возможных перемещений: если механическая система находится в равновесии, то при любом возможном перемещении системы сумма работ всех активных сил равна нулю: $\sum \delta A_i^e = 0$. Здесь считаем, что связи механической системы идеальны, а под возможными перемещениями понимаем воображаемые бесконечно малые перемещения системы, допускаемые в данное мгновение наложенными связями без нарушения их.

Принцип возможных скоростей: для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил на любых возможных скоростях была равна нулю: $\sum \overline{P}_i \overline{V}_i = 0$.

Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики): при движении механической системы сумма возможных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях всегда равна нулю: $\sum(\overline{P}_i + \overline{\Phi}_i)\delta\bar{r}_i = 0$. Также при движении механической системы сумма возможных мощностей активных сил и сил инерции на любых возможных скоростях всегда равна нулю: $\sum(\overline{P}_i + \overline{V}_i)\delta V_i = 0$, или в проекциях на координатные оси $\sum[(X_i + \Phi_{ix})\delta x_i + (Y_i + \Phi_{iy})\delta y_\mathrm{i} + {}$ $+ (Z_i + \Phi_{iz})\delta z_i = 0$.

Обобщённая сила Q_j, соответствующая обобщённой координате q_j – это скалярная величина, определяемая отношением элементарной работы действующих сил на перемещение механической системы, вызванном элементарным приращением координаты q_j, к величине этого приращения. Для системы с j числом степеней свободы получаем $Q_j = \sum \overline{P}_i \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$. Для системы с одной степенью свободы $Q = \delta A / \delta q$.

Уравнение Лагранжа второго рода: разность производной по времени от обобщённого импульса и частной производной от кинетической энергии системы по обобщённой координате равна обобщённой силе: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$.

Уравнение Лагранжа второго рода для консервативных механических систем: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, или $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Задание Д1
Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Тело движется из точки *A* по участку *AB* (длиной *l*) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течении τ с. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен *f*. В точке *B* тело покидает плоскость со скоростью V_B, описывая траекторию $y=f(x)$ и попадает в точку *C* плоскости *BC* или *BD* со скоростью V_C, находясь в полёте *T* с.

Исходные данные и параметры, которые требуется определить, взять из табл. 3.2 и рис. 3.8. Считать $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Таблица 3.2

Вариант	**Дано:**						**Найти:**		
	***h*, м**	***d*, м**	***l*, м**	***f***	***τ*, с**	***T*, с**			
1	2,0	–	2,0	0,10	–	1,5	$y = f(x)$	V_C	d
2	2,5	–	2,0	0,15	1,0	–	V_A	d	T
3	3,0	–	1,5	0,10	–	2,0	τ	d	V_C
4	–	4,0	–	0,10	2,0	3,5	h	l	V_A
5	–	–	3,0	0,15	1,5	4,0	V_C	h	d
6	–	3,0	–	0,20	1,0	3,0	l	h	V_A
7	–	4,0	2,5	0,05	1,0	–	V_C	h	T
8	6	–	2,0	–	0,5	2,0	V_A	f	d
9	8	–	1,5	–	0,5	2,0	V_C	f	$y = f(x)$
0	–	–	3,0	0,07	0,7	1,5	h	$y = f(x)$	V_A

.

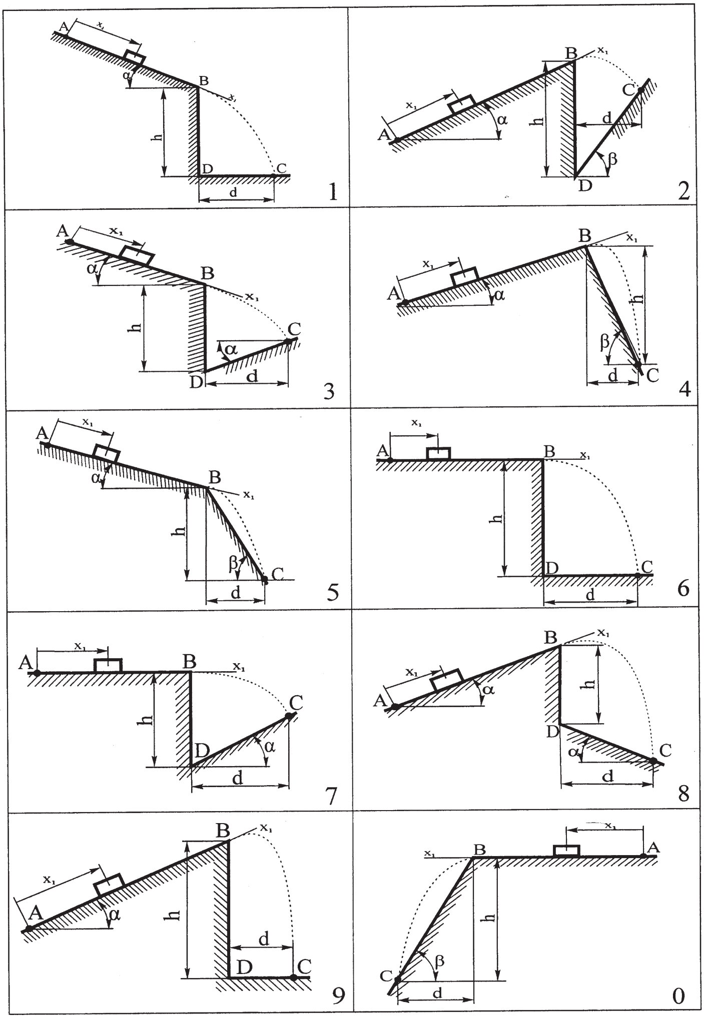


Рис. 3.8

Указания. Задание Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения тела на участке *AB*, учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке *AB* или его длину, определить, какую скорость будет иметь тело в точке *B*. Эта скорость является начальной для движения тела на участке *BC*. После этого составляют и интегрируют дифференциальное уравнение движения на участке *BC* тоже с учётом начальных условий, ведя отсчёт времени от момента, когда тело находится в точке *B*, и полагая, что в этот момент $t = 0$. Из полученных уравнений определяют требуемые величины.

Пример. В результате полученного толчка тело начало скользить по поверхности *AB* из точки *A* с начальной скоростью V_A, расположенной под углом α к горизонту в течении τ секунд (см. рис. 3.9). Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен f. Пройдя по плоскости расстояние $AB = l$, материальная точка покидает поверхность со скоростью V_B и падает на горизонтальную площадку в точку *C* со скоростью V_C, при этом оно находилось в воздухе *T* секунд. При решении задачи не учитывать сопротивление воздуха.

Дано: $V_A = 2$ *м/с*, $\alpha = 30°$, $h = 3$ *м*, $\beta = 60°$, $\tau = 2$ *с*, $f = 0{,}4$.

Определить: d, l, уравнение траектории тела на участка *BC*.

Решение. В связи с тем, что при движении материальной точки от *A* к *C*, силы различны на участках *AB* и *BC*, разделим траекторию движения точки на части и рассмотрим её движение на участке *AB*, под действием сил: силы тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$, силы трения $\overline{F}_{тр}$, нормальной реакции опоры $\overline{N}$.

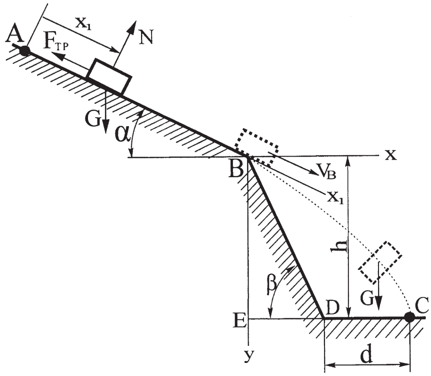


Рис. 3.9

Составим дифференциальное уравнение на ось x_1:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{xi} = G \sin \alpha - F_{тр},$$

где $G=mg$, $F_{тр}=f \cdot N$, здесь $N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$.

Тогда, разделив на m

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha$$

и дважды проинтегрировав дифференциальное уравнение, получим

$$\dot{x}_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Определим постоянные интегрирования из начальных условий: когда точка находилась в точке A: при $t = 0$ $\dot{x}_1 = V_A =$ $= 2$ м/с, $x_1 = 0$. Подставив эти значения в уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$ находим $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

Тогда уравнения, характеризующие скорость и уравнение движения тела на участке AB, имеют вид:

$$\dot{x}_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha)t + 2,$$

$$x_1 = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + 2t.$$

Для момента $t = \tau = 2$ *с*, когда тело находится в точке *B,* имеем $\dot{x}_1 = V_B$, $x_1 = l$ и, подставляя их в уравнение движения, получаем

$$V_B = (9{,}8 \cdot \sin 30° - 0{,}4 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30°) \cdot 2 + 2 = 5{,}01 \text{ м/с}.$$

$$l = (9{,}8 \cdot \sin 30° - 0{,}4 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30°) \cdot 2^2/2 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ м}$$

Рассмотрим теперь движение груза на участке *BC*: найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_o = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующую на него силу тяжести $G=mg$. Проводим из точки *B* оси *Bx* и *By* и составим дифференциальные уравнения движения тела

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{xi} = 0; \qquad m\ddot{y} = \sum F_{yi} = G.$$

Разделив обе части на *m* и дважды проинтегрировав, получим

$$\ddot{x} = 0; \qquad \ddot{y} = g;$$

$$\dot{x} = C_3; \qquad \dot{y} = gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5; \qquad y = g\frac{t^2}{2} + C_4 t + C_6.$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда тело находится в точке *B*, считая в этот момент $t = 0$. Тогда, при $t = 0$ $V = V_B = 5{,}01$ *м/с* или в проекциях на координатные оси: $\dot{x}_0 = V_B \cos\alpha$, $\dot{y}_0 = V_B \sin\alpha$, $x = 0$. Подставляя $t = 0$ в уравнения, полученные в результате интегрирования, имеем: $\dot{x}_0 = C_3$; $\dot{y}_0 = C_5$; $x_0 = C_4$; $y_0 = C_6$. Следовательно:

В результате находим уравнения проекции скорости тела

$$\dot{x} = V_B \cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + V_B \sin\alpha$$

и уравнения его движения

$$x = V_B \cos\alpha \cdot t \qquad y = g\frac{t^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot t.$$

В момент времени $t = T$ тело падает в точку C, для которой характерно, что $x = d + h \cdot ctg\beta = d + 3 \cdot ctg60° = d+1,73$, а $y = h = 3$ *м*. Подставляя эти данные в уравнения движения, получим

$$d + 1,73 = V_B \cos\alpha \cdot T;$$

$$h = 3 = g\frac{T^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot T \cdot$$

Зная $h = 3$ м и $V_B = 5,01$ м/с, из последнего выражения находим T, решив квадратное уравнение

$$3 = 4,9T^2 + 5,01 \cdot \sin 30° \cdot T$$

$$\text{или } 4,9T^2 + 5,01 \cdot \sin 30° \cdot T - 3 = 0,$$

$$T_1 = -1,078 \text{ с}; \ T_2 = 0,56 \text{ с}.$$

Время отрицательным быть не может, значит, $T = 0,56$ с. Отсюда $d = 5,01 \cdot \cos 30° \cdot 0,56 - 1,73 = 2,43 - 1,73 = 0,7$ м.

Для того чтобы определить уравнение траектории, нужно исключить время из одного из уравнений движения (сделаем это из первого уравнения), и подставим во второе. Если $t = \dfrac{x}{V_B \cdot \cos\alpha}$ тогда

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_B \cos\alpha}\right)^2 + V_B \sin\alpha \frac{x}{V_B \cos\alpha} = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_B \cos\alpha}\right)^2 + xV_B \cdot tg\alpha .$$

Ответ: $d = 0,7$ м, $l = 7$ м, $y = \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{V_B \cos\alpha}\right)^2 + xV_B \cdot tg\alpha$.

Задание Д2
Исследование колебательного движения материальной точки

Механическая система с точечной массой m (см. рис. 3.10) имеет два упругих элемента жёсткостью c_1 и c_2, совершает малые свободные колебания в вертикальной плоскости. Определить параметры согласно табл. 3.3. Массами стержней и блоков пренебречь. Принять исходные данные из таблицы, считая начальное положение точечной массы *m* как y_0, начальную скорость – $\dot{y}_0$, амплитуду колебаний – *A*, начальную фазу – β, период колебаний *T*, частоту колебаний – *v*, уравнение движения груза – $y = f(t)$. Размеры $OA = a$, $OB = b$, $OC = 0{,}5b$ принять для схем, в которых они приводятся. Сопротивление воздуха и в шарнирах не учитывать.

Таблица 3.3

Вариант	**Дано**							**Найти**		
	c_1**, кН/м**	c_2**, кН/м**	y_o**,мм**	$\dot{y}$**,м/с**	**a, м**	**b, м**	**m, кг**			
1	10	5	10	2	0,30	0,50	5	$y = f(t)$	*A*	*v*
2	5	15	20	3	0,40	0,70	7	*v*	$y = f(t)$	β
3	12	5	10	4	0,20	0,50	5	*A*	β	*v*
4	15	6	15	5	0,25	0,60	10	*T*	*v*	$y = f(t)$
5	6	18	15	5	0,35	0,60	10	*T*	*A*	β
6	10	10	20	5	0,15	0,40	10	β	*T*	*A*
7	15	15	15	4	0,20	0,50	15	*v*	β	*A*
8	6	12	10	3	0,25	0,40	8	$y = f(t)$	*v*	*A*
9	7	10	10	2	0,30	0,40	7	β	*A*	*T*
0	10	8	20	3	0,40	0,60	6	*v*	*A*	$y = f(t)$

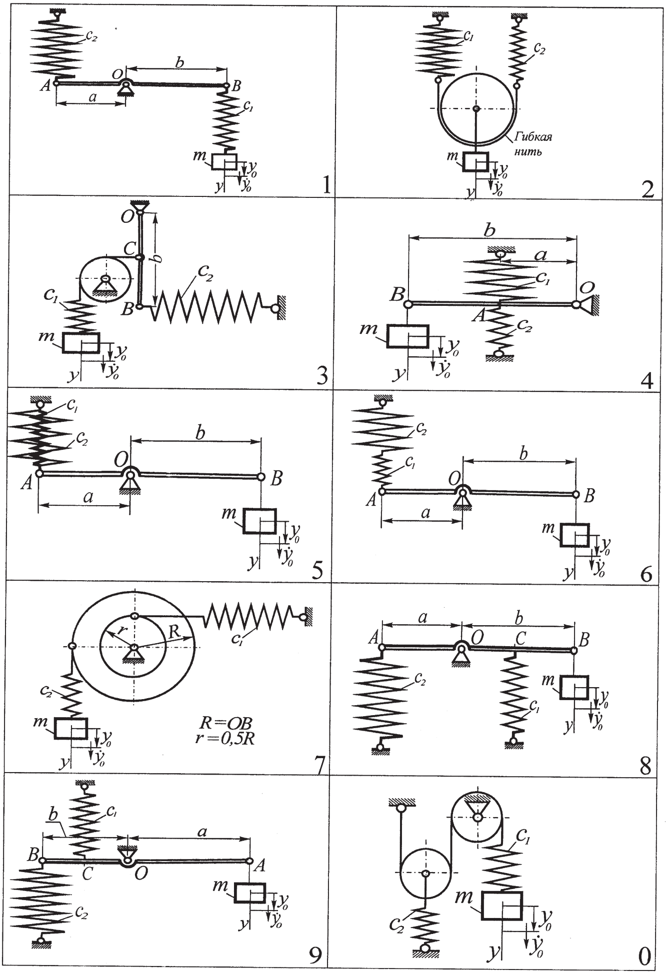


Рис. 3.10

Указания. Задание Д2 – на определение уравнения движения груза и параметров при его свободных колебаниях. Исходную колебательную систему, приводящую тяжёлую точечную массу в свободное вертикальное колебание, упрощают и приводят к простейшему виду, заменив рычажный блок с двумя пружинами на одну вертикальную пружину с эквивалентной жёсткостью. Для этого составляют уравнение равновесия рычажной системы, включая восстанавливающие силы упругих элементов, выраженные через их деформации, которые в дальнейшем выражаются через вертикальное смещение точечной массы. Дальнейший ход решения разъяснён в примере по трём вариантам.

Пример. Для системы (см. рис. 3.11) с упругими элементами жёсткостью $c_1=10$ кН/м и $c_2=5$ кН/м, расположенной в вертикальной плоскости и совершающей свободные колебания, определить уравнение движения груза массой $m = 5$ кг, амплитуду, частоту и период его колебаний. Сопротивлением воздуха в шарнире, а также массой стержней пренебречь. Колебательные движения считать малыми.

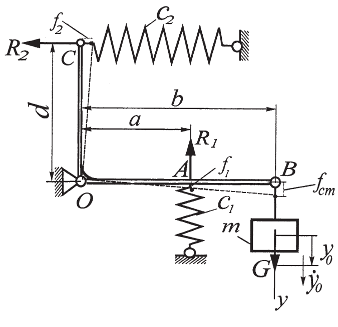


Рис. 3.11

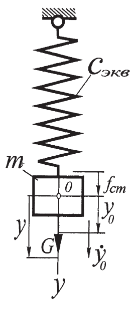


Рис. 3.12

Исходные размеры: $OA = a = 0{,}4$ *м;* $OB = b = 0{,}6$ *м;* $OC = d = 0{,}3$ *м.*

Начальные параметры: $y_0 = 0{,}04$ *м;* $\dot{y}_0 = 3$ *м/с.*

Решение.

Вариант 1. Так как груз совершает свободные вертикальные колебания под действием линейных восстанавливающих сил R_1 и R_2, а массами остальных элементов пренебрегаем, то колебательную систему упростим, заменив упругую систему одной вертикальной пружиной с эквивалентной жёсткостью $c_{экв} = \frac{G}{f_{cm}}$ (см. рис. 3.12), где f_{cm} – статическое смещение точки B.

Из уравнения равновесия рычажной системы получаем

$$Gb = R_1 a + R_2 d.$$

Отсюда (3.1)

$$G = R_1 \frac{a}{b} + R_2 \frac{d}{b}. \qquad (3.1)$$

Учитывая, что

$$R_1 = c_1 f_1 = c_1 f_{cm} \frac{a}{b},$$

$$R_2 = c_2 f_2 = c_2 f_{cm} \frac{d}{b},$$

где f_1 и f_2 – статические изменения длин упругих элементов, тогда уравнение (3.1) принимает вид (3.2)

$$G = c_1 f_{cm} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_2 f_{cm} \left(\frac{d}{b}\right)^2. \qquad (3.2)$$

Так как $c_{экв} = \frac{G}{f_{cm}}$, получаем

$$c_{эки} = c_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_2 \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Если дифференциальное уравнение свободных колебаний имеет вид $\ddot{y} + k^2 y = 0$, где $k^2 = \frac{c_{экв}}{m}$, тогда (3.3)

$$k^2 = \frac{c_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_2 \left(\frac{d}{b}\right)^2}{m}. \qquad (3.3)$$

Подставляя числовые значения, получаем $k = 33,7$.

Вариант 2. Рассмотрим перемещение точечной массы m как свободные колебания груза, подвешенного к упругому элементу. В этом случае $k^2 = \dfrac{g}{f_{ст}}$, где g – ускорение свободного падения.

Из уравнения (3.2) получаем

$$f_{ст} = \frac{G}{c_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{d}{b}\right)^2}.$$

И тогда

$$k^2 = \frac{g}{f_{ст}} = \frac{g\left[c_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{d}{b}\right)^2\right]}{mg},$$

получаем то же значение $k = 33,7$, что в первом варианте.

Вариант 3. Применим уравнение Лагранжа второго рода для консервативной системы (3.4)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial П}{\partial y}. \tag{3.4}$$

Если система имеет одну массу, то её кинетическая энергия будет равна $T = \dfrac{m\dot{y}^2}{2}$, и тогда правая часть уравнения (3.4) примет вид (3.5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = m\ddot{y}. \tag{3.5}$$

Определим потенциальную энергию $П$ в положении, определяемой координатой y, как работу, совершаемую силой тяжести G и силами упругости R_1 и R_2 при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое:

$$П = П_{\mathrm{I}} + П_{\mathrm{II}} + П_{\mathrm{III}}.$$

Для силы тяжести

$$П_{\mathrm{I}} = -Gy.$$

Для силы упругости R_1

$$П_{II} = \frac{c_1(f_1 + y_A)^2}{2} - \frac{c_1 f_1^2}{2} = \frac{c_1\left(f_1 + y\dfrac{a}{b}\right)^2}{2} + \frac{c_1 f_1^2}{2} = c_1 f_1 y \frac{a}{b} + \frac{c_1 y^2 \left(\dfrac{a}{b}\right)^2}{2}.$$

Для силы упругости R_2

$$П_{III} = \frac{c_2(f_{21} + x_C)^2}{2} - \frac{c_2 f_2^2}{2} = \frac{c_2\left(f_2 + y\dfrac{d}{b}\right)^2}{2} + \frac{c_2 f_2^2}{2} = c_2 f_2 y \frac{d}{b} + \frac{c_2 y^2 \left(\dfrac{d}{b}\right)^2}{2}.$$

Учитывая, что $G = R_1 \dfrac{a}{b} + R_2 \dfrac{d}{b} = c_1 f_1 \left(\dfrac{a}{b}\right) + c_2 f_2 \left(\dfrac{d}{b}\right)$, получаем после сложения выражений потенциальных энергий

$$П = \left[-y\left(c_1 f_1 \frac{a}{b} + c_2 f_2 \frac{d}{b}\right)\right] + \left[c_1 f_1 y \frac{a}{b} + \frac{c_1 y^2 \left(\dfrac{a}{b}\right)^2}{2}\right] + \left[c_2 f_2 y \frac{d}{b} + \frac{c_2 y^2 \left(\dfrac{d}{b}\right)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{c_1 y^2 \left(\dfrac{a}{b}\right)^2}{2} + \frac{c_2 y^2 \left(\dfrac{d}{b}\right)^2}{2}$$

и тогда правая часть уравнения (3.5) принимает вид (3.6)

$$\frac{\partial П}{\partial y} = y\left[c_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_2 \left(\frac{d}{b}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

В последнем выражении значения в квадратных скобках соответствуют значению $c_{экв}$, найденному по первому варианту решения. Значит $\dfrac{\partial П}{\partial y} = y c_{экв}$. Следовательно, с учётом (3.4), (3.5) и (3.6) получаем

$$m\ddot{y} = -y_{экв}, \text{ или } \ddot{y} + \frac{c_{экв}}{m} y = 0, \text{ или } \ddot{y} + k^2 y = 0.$$

Таким образом, во всех вариантах решения $k = 33{,}7$.

Период колебания груза T определится как

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}186 \text{ с},$$

а частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T} = 5{,}38 \text{ Гц}.$$

Для составления уравнения свободных колебаний груза вида $y = A\sin(kt + \beta)$ определим значение амплитуды

$$A = \sqrt{y_0^2 + (\dot{y}_0 / k)^2} = 0{,}098 \text{ м}$$

и значения начальной фазы β

$$\beta = arctq \frac{ky_0}{\dot{y}_0} = 0{,}42 \text{ рад.}$$

С учётом этих значений получаем уравнение движения груза в виде гармонических колебаний

$$y = 0{,}098 \sin(33{,}7t + 0{,}42).$$

Определив k, общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний можно представить и в другой форме:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Если $\dot{y} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$ то постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий $C_1 = y_0$ и $C_2 = \dot{y}_0 / k$. Тогда уравнение движения точечной массы принимает вид:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt$$

или $y = 0{,}04 \cos 33{,}7t + 0{,}09 \sin 33{,}7t$.

Ответ: Т = 0,186 с, А = 0,098 м, ν = 5,38 Гц,
$y = 0{,}098 \sin(33{,}7t + 0{,}42)$ или $y = 0{,}04 \cos 33{,}7t + 0{,}09 \sin 33{,}7t$.

Задание Д3
Исследование воздействия ударного импульса на рычажную конструкцию

Для механической системы (см. рис. 3.13), состоящей из рычажной конструкции и ударяющего по нему тела, определить:

– угловую скорость конструкции после удара;

– воспринимаемый ударный импульс между грузом и стержнем;

– ударный импульс в опоре рычажной системы;

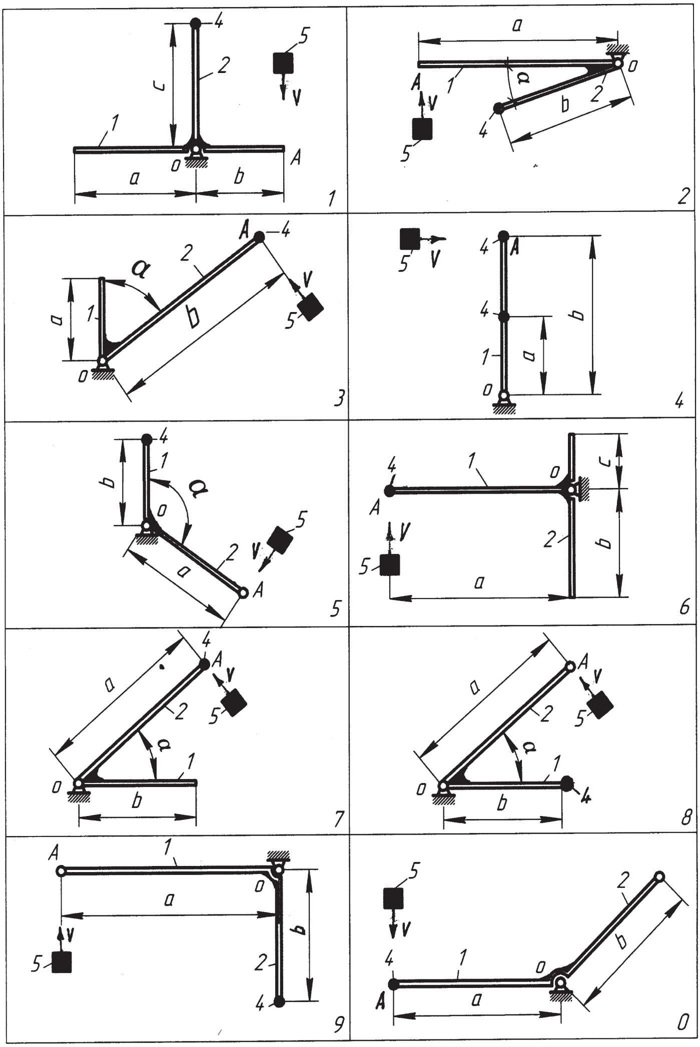
– потерянную кинетическую энергию в процессе удара.

Конструкция может вращаться вокруг оси O и состоит из однородных стержней *1* и *2*. Масса 1 м длины стержня m и масса точечного груза m_4 приведены в табл. 3.4, а размер c принять равным $0,5\ a$. Материальная точка массой m_5 перемещается со скоростью $V = 5$ м/с и ударяется о неподвижную рычажную конструкцию в точке A, причём удар является абсолютно неупругим.

Таблица 3.4

Величины	***Варианты***									
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***0***
a, м	1	2	3	1,5	2,5	3	2	1	1,5	2,5
b, м	3	2	1	3	2,5	1	2	4	3,5	1
α, град.	30	45	60	120	135	150	30	60	60	30
m, кг	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
m_4, *кг*	3	3	4	4	10	10	5	5	4	4
m_5, *кг*	5	10	10	5	5	5	10	10	3	3

Указания. Задание Д3 на применение теоремы об изменении кинетического момента при ударе относительно оси вращения рычажной конструкции. Удар считать неупругим. Вначале определяют кинетический момент системы до удара, а затем – после удара, учитывая, что скорости тел при этом изменяются. Приравнивая полученные кинетические моменты, определяют требуемые в задании величины.



4
5
2
c
V
1
0
A
a
b
1
a
0
A
V
α
1
2
5
4
b
2
A
4
2
α
V
a
1
b
5
0
3
5
V
4
A
4
b
1
a
0
4
4
1
b
a
0
α
2
V
5
A
5
4
1
0
c
A
V
2
b
5
a
6
4
A
V
a
2
5
α
1
0
b
7
A
V
a
2
5
α
1
0
4
b
8
A
1
0
a
V
b
5
2
4
9
5
2
V
b
4
1
0
A
a
0

Рис. 3.13

Пример. Материальная точка (см. рис. 3.14) массой $m_5 = 20$ кг, двигаясь горизонтально со скоростью $V = 5$ м/с, сталкивается в точке A с рычажной системой, состоящей из однородных стержней *1* и *2*. Считая удар абсолютно неупругим, *определить* угловую скорость стержней ω и груза после удара u, а также величины возникающих ударных импульсов S и S_O.

Найти: потерянную при ударе кинетическую энергию системы.

Дано: $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 3$ м, $m_1 = 30$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_4 = 40$ кг.

Решение. Рассматривая взаимодействие материальной точки *5* и рычажной систем *1* и *2* с грузом *4*, получаем внешний ударный импульс на ось вращения, который разложим на составляющие S_{ox} и S_{oy}, а возникающие в точке A сила и импульс $\overline{S}$ относятся к внутренним факторам.

Разобьём массу однородного стержня *1* $m_1 = 30$ кг на две $m_a = 10$ кг и $m_b = 20$ кг в соответствии с длиной его участков a и b. Применим к системе теорему об изменении кинетического момента при ударе относительно оси вращения z: $L_z - L_{zo} = \sum M_z\left(\overline{S_i^e}\right)$.

В данном случае $\sum M_z\left(\overline{S_i^e}\right) = 0$, тогда $L_z = L_{z0}$.

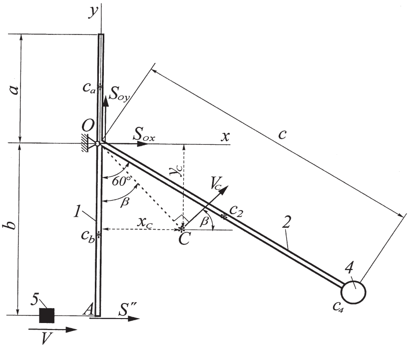


Рис. 3.14

До удара стержневая конструкция находилась в покое, и кинетический момент системы формировала подвижная масса m_5: $L_{z0} = m_5 Vb = 240$ кгм²/с.

После удара скорость тела 5 изменяется и становится равной некоторой величине u, а стержни приобретают некоторую угловую скорость ω и кинетический момент $J_z\omega$, где J_z – осевой момент стержневой конструкции. Для данного случая

$$J_z = \frac{m_a a^2}{3} + \frac{m_b b^2}{3} + \frac{m_2 c^2}{3} + m_4 c^2 = 420 \text{ кгм}^2.$$

После удара $L_{z0} = m_5 ub + J_z\omega$.

Так как удар является абсолютно не упругим, то $u = \omega b$ и тогда

$$L_z = (m_5 b^2 + J_z)\omega.$$

Учитывая $L_z = L_{z0}$, получаем $\omega = \dfrac{m_5 Vb}{m_5 b^2 + J_z} = 0{,}4 \text{ с}^{-1}$.

Скорость тела 5 после удара $u = \omega b = 0{,}8$ м/с.

Для определения ударного импульса S между телом 5 и стержневой конструкцией (см. рис. 3.15) применим теорему об изменении количества движения при ударе $\overline{K} - \overline{K}_0 = \sum \overline{S}_i^e$.

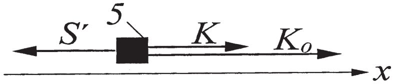


Рис. 3.15

В проекции на горизонтальную ось имеем $m_5 u - m_5 V = S$, откуда получаем $S = -84$ нс.

Определяем ударный импульс на ось стержневой конструкции, применив теорему об изменении количества движения при ударе и учитывая, что количество движения тела равно произведению его массы на скорость центра масс V_C (см. рис. 3.14), а также $S = S' = S''$.

До удара стержни были неподвижными, т. е. $K_0 = 0$, после удара – $\overline{K} = \overline{V}_C \sum m_i$. Определим положение центра масс стержневой конструкции.

$$x_c = \frac{m_a x_{ca} + m_b x_{cb} + m_2 x_{c2} + m_4 x_{c4}}{\sum m_i} = 1{,}46 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{m_a y_{ca} - m_b y_{cb} - m_2 y_{c2} - m_4 y_{c4}}{\sum m_i} = -1{,}03 \text{ м}.$$

$$OC = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 1{,}79 \text{ м}.$$

$$\beta = arctg \frac{x_c}{y_c} = 54{,}8^0.$$

Скорость центра масс $V_c = \omega \cdot$ ОС = 0,716 м/с.

Определим ударный импульс на ось рычажной системы в проекциях, на ось x

$V_c \cos \beta \sum m\text{i} - 0 = S - S_{0x}$, отсюда $S_{0x} = V_c \cos \beta - S = -51$ Нс;

на ось y:

$V_c \cos \beta \sum m\text{i} - 0 = 0 - S_{0y}$, отсюда получаем S_{0y} =65,4 Нс, или $|S_0| = \sqrt{S_{0x}^2 + S_{0y}^2} = 82{,}9$ Нс.

Находим потерянную в процессе удара кинетическую энергию. До удара перемещалась только точка массой m_5 и её кинетическая энергия была $T_0 = \frac{m_5 V^2}{2} = 250$ Дж.

После удара движется и точка, и рычажная конструкция. Общую кинетическую энергию находим как $T = \frac{m_5 u^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2} = 40$ Дж.

Таким образом, потерянная кинетическая энергия системы равна: $\Delta T = T_0 - T$ =210 Дж.

Ответ: ω =0,4 с$^{-1}$; u = 0,8 м/с; S = –84 Нс; S_0 = 82,9 Нс; ΔT = 210 Дж.

Задание Д4
Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система (см. рис. 3.16) состоит из грузов *1* и *2*, катка *3*, шкивов *4* и *5* радиусами $R_4 = 0{,}4$ *м*, $r_4 = 0{,}2$ *м*, $R_5 = 0{,}5$ *м*, $r_5 = 0{,}1$ *м* соответственно. Каток считать сплошными однородными цилиндрами, а массу шкивов считать распределённой по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием $F = f(t)$, зависящей от перемещения S точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкивы *4* и *5* действуют постоянный момент M_1, M_2 сил сопротивления соответственно. Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение S станет равным S_1. Искомые величины указаны в столбце *«Найти»* табл. 3.5.

Таблица 3.5

Вариант	m_1, *кг*	m_2, *кг*	m_3, *кг*	m_4, *кг*	m_5, *кг*	s_1, *м*	M_1, *Н·м*	M_2, *Н·м*	***F = f(s), Н***	***Найти***
1	10	2	3	2	3	1,2	0,2	0,5	80(2+3s)	ω_5, V_2, V_B
2	8	3	2	2	1	1,0	0,3	0,4	60(4+2s)	ω_5, V_{C3}, V_A
3	6	1	1	2	1	1,3	0,1	0,3	70(2+5s)	ω_3, V_2, V_B
4	8	3	2	2	2	1,4	0,3	0,2	60(3+4s)	ω_5, V_{C3}, V_A
5	10	4	3	3	3	1,0	0,4	0,5	50(5+3s)	ω_4, V_A, V_B
6	7	1	2	2	2	1,1	0,3	0,2	40(5+4s)	ω_3, ω_5, V_A
7	8	2	2	3	2	1,2	0,2	0,4	80(2+4s)	ω_5, V_2, V_B
8	9	3	2	3	3	0,8	0,3	0,4	70(3+5s)	ω_5, V_2, V_A
9	10	3	3	3	3	0,6	0,4	0,5	80(5+2s)	ω_3, ω_5, ω_4
0	6	1	1	2	1	1,5	0,1	0,2	60(4+5s)	ω_5, V_2, V_B

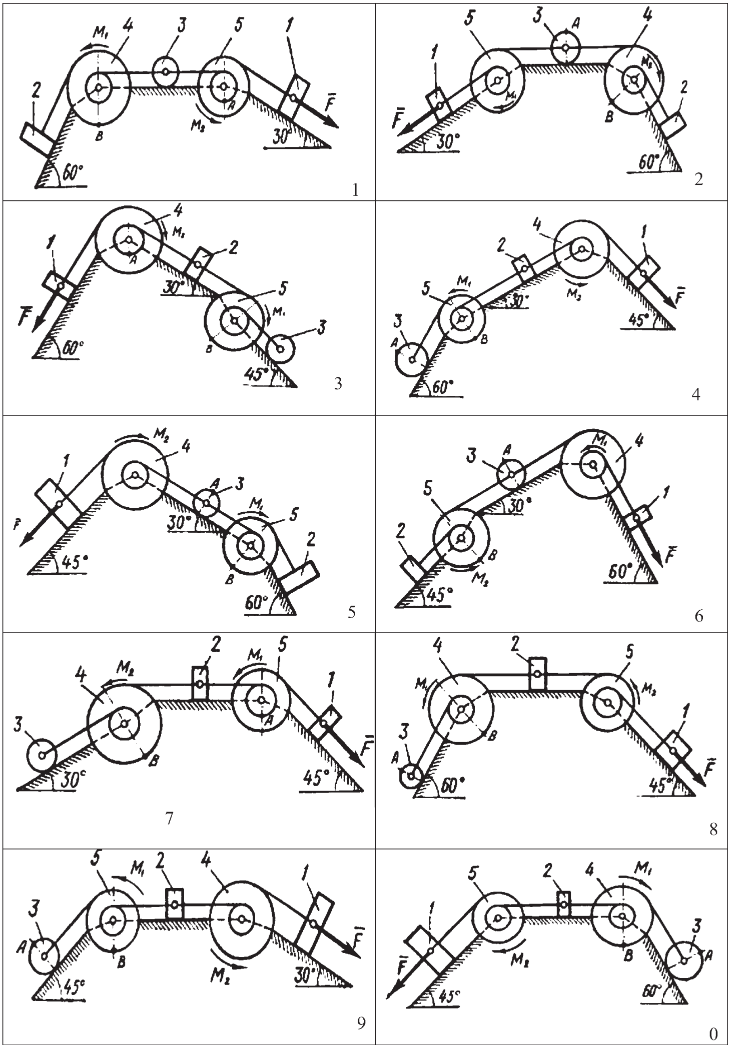


Рис. 3.16

Примечание: на схемах принять: V_1, V_2, V_{C3} – скорость грузов *1, 2* и центра масс тела *3* соответственно; ω_3, ω_4, ω_5 – угловые скорости тел *3, 4, 5* соответственно.

Пример. Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, катка *3* радиуса $R_3 = 0{,}15$ *м*, блока *4* радиуса $R_4 = 0{,}2$ *м*, $r_4 = 0{,}1$ *м* ступенчатого шкива *5* с радиусами $R_5 = 0{,}3$ *м*, $r_5 = 0{,}1$ *м* (см. рис. 3.17). Блок и каток считать сплошными однородными цилиндрами, а массу шкива *5* считать распределённой по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Под действием $F = f(t)$, зависящей от перемещения S точки её приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив *5* действует постоянный момент M_1 сил сопротивления. Определить V_1, V_B, ω_3.

Дано: $f = 0{,}1$, $R_4 = 0{,}2$ *м*, $r_4 = 0{,}1$ *м*, $R_5 = 0{,}3$ *м*, $r_5 = 0{,}1$ *м*, $R_3 = 0{,}15$ *м*, $m_1 = 8$ *кг*, $m_2 = 10$ *кг*, $m_3 = 9$ *кг*, $m_4 = 5$ *кг*, $m_5 = 6$ *кг*, $M_1 = 0{,}9$ *Н·м*, $M_2 = 0$, $F = 40(3+5S)$ *Н*, $s_1 = 1{,}6$ *м*.

Определить: V_1, V_B, ω_3.

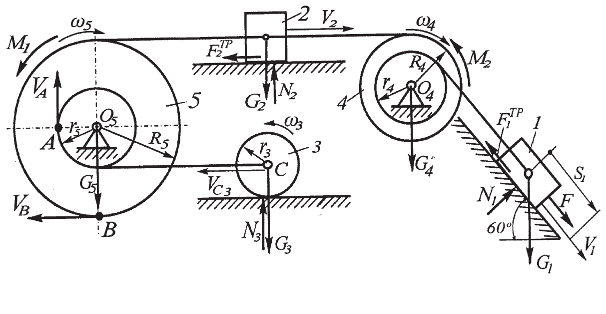


Рис. 3.17

Решение: Для определения V_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_R^e.$$

Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Тогда (3.7)

$$T = \sum A_R^e . \qquad (3.7)$$

Величина T равна сумме энергий всех тел системы (3.8)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5, \qquad (3.8)$$

где $T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$ – тело *1* движется поступательно;

$T_2 = \dfrac{m_2 V_2^2}{2}$ – тело *2* движется поступательно;

$T_3 = \dfrac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \dfrac{I_3 \omega_3^2}{2}$ – тело *3* совершает плоское движение;

$T_4 = \dfrac{I_4 \omega_4^2}{2}$ – тело *4* вращается вокруг неподвижной оси O_4;

$T_5 = \dfrac{I_5 \omega_5^2}{2}$ – тело *5* вращается вокруг неподвижной оси O_5.

Все входящие в эти выражения скорости выразим через искомую скорость V_1, используя приёмы кинематики (3.9)

$$\omega_4 = \frac{V_1}{r_4};\; V_2 = \frac{V_1 R_4}{r_4};\; \omega_5 = \frac{V_1 R_4}{r_4 R_5};\; V_{C3} = \frac{V_1 R_4 r_5}{r_4 R_5};\; \omega_3 = \frac{V_1 R_4 r_5}{r_4 R_5 R_3} . \qquad (3.9)$$

Моменты инерции тел имеют значения (3.10)

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2};\; I_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2};\; I_5 = m_5 R_5^2 . \qquad (3.10)$$

Подставив все выше приведённые значения величины в равенство (3.8) получим, с учётом преобразований (3.11)

$$T = V_1^2 \cdot \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{R_4}{r_4}\right)^2 + \frac{m_3}{2}\left(\frac{R_4 \cdot r_5}{r_4 \cdot R_5}\right)^2 + \frac{m_3}{4}\left(\frac{R_4 \cdot r_5}{r_4 \cdot R_5}\right)^2 + \frac{m_4}{4}\left(\frac{1}{r_4}\right)^2 + \frac{m_5}{2}\left(\frac{R_4}{r_4}\right)^2 \right) =$$

$$= V_1^2 \cdot \left(\frac{8}{2} + \frac{10}{2}\left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(\frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}1 \cdot 0{,}3}\right)^2 + \frac{9}{4}\left(\frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}1 \cdot 0{,}3}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right)^2 \right) = 162 \cdot V_1^2$$

(3.11)

Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда тело *1* пройдёт путь s_1. Одновременно все перемещения следует выразить через s_1, для этого учтём, что зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями, т. е.

$$\varphi_4 = \frac{s_1}{r_4}; \quad s_2 = \frac{s_1 R_4}{r_4}; \quad \varphi_5 = \frac{s_1 R_4}{r_4 R_5}; \quad s_3 = \frac{s_1 R_4 r_5}{r_4 R_5}; \quad \varphi_3 = \frac{s_1 R_4 r_5}{r_4 R_5 R_3}.$$

В результате получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 40(3+5s)\,ds = 40(3s_1 + 2{,}5s_1^{\,2}) = 40(3\cdot 1{,}6 + 2{,}5\cdot 1{,}6^2) = 448 \quad Дж,$$

$$A(\overline{G_1}) = G_1 s_1 sin60° = m_1 g s_1 sin60° = 8\cdot 9{,}8\cdot 1{,}6\cdot 0{,}866 = 108{,}63 \quad Дж;$$

$$A(\overline{F}_1^{TP}) = -F_1^{TP} s_1 = -fN_1 s_1 = -fG_1 cos60° s_1 = -fm_1 cos60° g s_1 =$$
$$= -0{,}1\cdot 8\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5\cdot 1{,}6 = -6{,}272 \ Дж$$

$$A(\overline{F}_2^{TP}) = -F_2^{TP} s_2 = -fN_2 s_2 = -fG_2 s_2 = -fm_2 g\frac{s_1 R_4}{r_4} = -0{,}1\cdot 10\cdot 9{,}8\cdot\frac{1{,}6\cdot 0{,}2}{0{,}1} = -31{,}36 \quad Дж.$$

$$A(M) = -M\varphi_5 = -\frac{M s_1 R_4}{r_4 R_5} = -\frac{0{,}9\cdot 1{,}6\cdot 0{,}2}{0{,}1\cdot 0{,}3} = -9{,}6 \ Дж.$$

Остальные силы имеют работу равную нулю, т. к. под действием $\overline{G}_4$, $\overline{G}_5$ тела *4* и *5* соответственно не перемещаются, а силы $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ направлению перемещения тел перпендикулярны. Тогда окончательно (3.12)

$$\sum A_R^e = 448+108{,}63-6{,}272-31{,}36-9{,}6=509{,}398 \quad (3.12)$$

Подставив выражения (3.11) и (3.12) в (3.7), получим

$$162\cdot V_1^2 = 509{,}398,$$

$$V_1 = 1{,}77 \text{ м/с}.$$

Зная V_1, и используя кинематические связи тел механизма, можно определить другие искомые величины

$$V_B = \omega_5 r_5 = \frac{V_1 R_4 r_5}{r_4 R_5} = \frac{1{,}77\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot 0{,}3} = 1{,}18 \text{ м/с};$$

$$\omega_3 = \frac{V_1 R_4 r_5}{r_4 R_5 R_3} = \frac{1{,}77 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}15} = 7{,}86 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: V_1 = 1,77 м/с; V_B = 1,18 м/с; ω_3 = 7,86 с$^{-1}$.

Задание Д5
Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Вертикальный вал *AE* (см. рис. 3.18), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω =10 с$^{-1}$, закреплён подпятником в точке *A* и подшипником в точке, указанной в табл. 3.6, причём *AB* = *BC* = *СД* = *ДЕ* = 0,4 м. К валу жёстко прикреплены невесомый стержень *1* длиной l_1 = 0,5 м с точечной массой m_1 = 4 кг на конце и тонкий однородный ломаный стержень массой m = 20 кг, состоящий из частей *2* и *3*, массы которых пропорциональны длинам (размеры частей стержня указаны на рисунках, где a = 0,2 м, а значения углов α, β, γ – в табл. 3.6). Оба стержня лежат в одной плоскости. Определить реакции подпятника и подшипника, пренебрегая весом вала.

Таблица 3.6

Вариант	***Положение элементов***			***Углы, град.***		
	Подшипник	***Невесомый стержень***	***Ломаный стержень***	α	β	γ
1	B	E	C	60	120	90
2	C	E	B	60	150	60
3	E	D	B	80	150	90
4	D	B	E	60	120	45
5	C	D	B	60	150	90
6	C	B	E	45	120	60
7	B	E	C	60	150	80
8	C	D	B	80	120	70
9	C	B	E	45	150	45
0	D	E	B	60	150	45

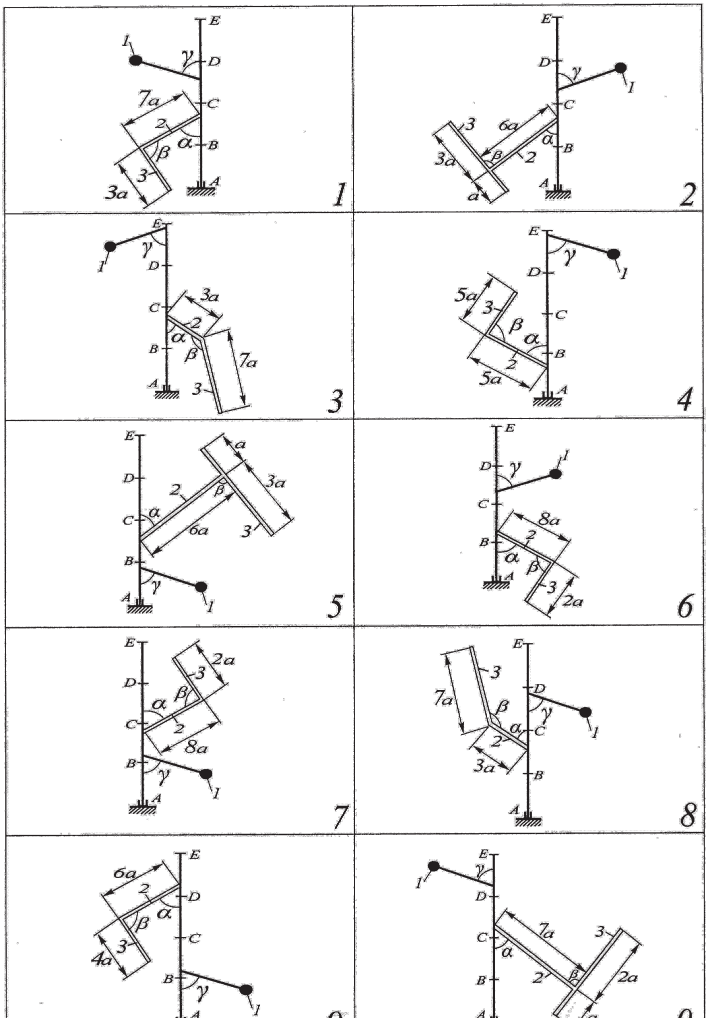


Рис. 3.18

Указания. Задание Д5 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть: когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня 2) имеют равнодействующую $\overline{R}^и$ то численно $R^и = ma_C$, где a_C – ускорение центра масс C стержня, но линия действия силы $\overline{R}^и$ в общем случае не проходит через точку C.

Пример. Вертикальный вал AE ($AB = BC = CD = DE =$ $= 0{,}4$ м) (см. рис. 3.19), закреплённый подпятником A и подшипником E, вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жёстко закреплены в точке B невесомый стержень длиной l_1 с точечной массой m_1, а в точке C – ломаный однородный стержень длиной $10a$ и массой m, состоящий из частей *2* и *3*. Оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: $\omega = 10$ с$^{-1}$, $l_1 = 0{,}5$ м, $a = 0{,}2$ м, $m_1 = 4$ кг, $m = m_2 +$ $+ m_3 = 20$ кг, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. *Определить:* реакции подпятника A и подшипника E, пренебрегая весом вала.

Решение. Согласно условию изображаем вал и прикреплённые к нему стержни с учётом заданных углов и с соблюдением пропорций линейных размеров (см. рис. 3.20).

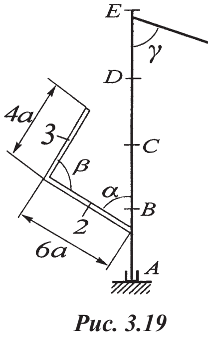


Рис. 3.19

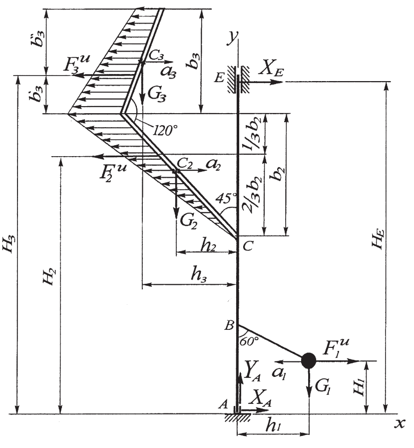


Рис. 3.20

Для определения реакций связей применим принцип Даламбера. Так как $\omega = const$, рассмотрим только центробежные силы инерции частиц каждого стержня. Для равномерно вращающегося тела сила инерции определяется как $\overline{F}^{и} = -m\overline{a}_C = m\omega^2 r$, где m – масса тела, r – расстояние от центра тела до оси вращения, $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс.

Ускорения центров масс точечного тела *1* и стержней *2* и *3* равны соответственно

$$a_1 = \omega^2 h_1 = \omega^2 l_1 \sin 60° = 43{,}3 \text{ м/с}^2,$$
$$a_2 = \omega^2 h_2 = \omega^2 0{,}5 l_1 \sin 45° = 42{,}3 \text{ м/с}^2,$$
$$a_3 = \omega^2 h_3 = \omega^2 (l_2 \sin 45° - 0{,}5\, l_3 \cos 75°) = 74{,}1 \text{ м/с}^2,$$

где l_1, l_2, и l_3 – длина стержней. Учитывая, что стержни *2* и *3* однородные, то при $l_2 + l_3 = 10a = 2$ м и при $m_2 + m_3 = 20$ кг получаем $m_2 = 12$ кг, $m_3 = 8$ кг.

Равнодействующая сил инерции точек тела равна их главному вектору и направлена против ускорения. С учётом расположения центра масс тел получаем

$$F_1^{и} = m_1 a_1 = 173{,}2 \text{ Н},$$

$$F_2^{и} = m_2 a_2 = 507{,}6 \text{ Н},$$

$$F_3^{и} = m_3 a_3 = 592{,}8 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор необходимо знать точки приложения сил $\overline{F}_2^{и}$ и $\overline{F}_3^{и}$. Линии действия равнодействующих $\overline{F}_2^{и}$ и $\overline{F}_3^{и}$ пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Линия действия $\overline{F}_2^{и}$ с треугольной формой распределения сил инерции проходит на расстоянии $2/3 b_2$ от вершины треугольника, а линия равнодействующей $\overline{F}_2^{и}$ с трапецеидальной формой распределения – на расстоянии b'_3 от $\Delta F^{и}_{max}$, определяемой как

$$b'_3 = \frac{b_3\left(\Delta F^u_{\max} + 2\Delta F^u_{\min}\right)}{3\left(\Delta F^u_{\max} + \Delta F^u_{\min}\right)},$$

где

$$b_3 = l_3 \sin 75° = 0{,}77 \text{ м},$$

$$\Delta F^u_{max} = \Delta\, m \cdot \omega^2 \cdot l_2 \cdot \Delta l \cdot sin\, 45°,$$

$$\Delta F^u_{max} = \Delta\, m \cdot \omega^2 \cdot l_2 \cdot \Delta l\, (l_2\, sin\, 45° - l_3 \cos 75°).$$

В последних выражениях Δl – элементарная длина стержня массой Δm. Подставляя ΔF^e, получаем

$$b'_3 = \frac{b_3\left[l_2 \sin 45° + 2\left(l_2 \sin 45° - l_3 \cos 75°\right)\right]}{3\left(2l_2 \sin 45° - l_3 \cos 75°\right)} = 0{,}37 \text{ м}.$$

Силы тяжести тел приложены к их центрам масс и равны:

$$G_1 = m_1 g = 39{,}2 \text{ Н},$$

$$G_2 = m_2 g = 117{,}6 \text{ Н},$$

$$G_3 = m_3 g = 78{,}4 \text{ Н}.$$

Проведём координатные оси Axy, вращающиеся вместе с валом так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3$; силы инерции – $\overline{F}^u{}_1, \overline{F}^u{}_2, \overline{F}^u{}_3$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{X}_E$.

Согласно принципу Даламбера все эти приложенные силы образуют уравновешенную систему. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получаем

$$\sum X_i = 0;\; X_A + X_E + F_1^u - F_2^u - F_3^u = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;\; Y_A - G_1 - G_2 - G_3 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0;\; F_3^u H_3 + F_2^u H_2 - X_E H_E - F_1^u H_1 - G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 = 0,$$

где $H_{1,}$ $H_{2,}$ H_3 – плечи сил $\overline{F}^и{}_1$, $\overline{F}^и{}_2$, $\overline{F}^и{}_3$, а h_1, h_2, h_3 – плечи сил тяжести $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ относительно точки A равные

$$H_1 = l_1 \cos 60° = 0{,}25 \text{ м},$$

$$H_2 = A\mathrm{C} + (2/3)l_2 \cos 45° = 1{,}37 \text{ м},$$

$$H_3 = A\mathrm{C} + l_2 \cos 45° + b'_3 = 2{,}02 \text{ м},$$

$$h_1 = l_1 \sin 60° = 0{,}43 \text{ м},$$

$$h_2 = 0{,}5 l_2 \sin 45° = 0{,}42 \text{ м},$$

$$h_3 = l_2 \sin 45° - 0{,}5 l_3 \cos 75° = 0{,}75 \text{ м}.$$

Подставив значения сил и плеч в систему трёх уравнений равновесия, найдём искомые реакции.

Ответ: $X_A = -285{,}3$ *Н;* $Y_A = 235{,}2$ *Н;* $X_E = 1212{,}5$ *Н*. Знак минус у реакции $\mathrm{X_A}$ указывает, что направление противоположно показанному на рисунке.

Задание Д6

Определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений

На вращающиеся звенья механической системы (см. рис. 3.21), расположенной в горизонтальной плоскости, приложены две пары сил с моментами M_1, M_2, а на ползун действует сила F. Положение равновесия механизма определяется углами α, β, γ, δ, φ. Длины звеньев равны: $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1$ м, $l_3 = 0{,}8$ м, $l_4 = 0{,}6$ м, а шарнир B находится в середине соответствующего стержня. Углы, фиксирующие положения звеньев, и два силовых параметра указаны в табл. 3.7. Найти значение и определить направление третьего силового параметра (указан в табл. 3.7) при котором механическая система в данном положении будет находиться в равновесии.

Таблица 3.7

Вариант	***Углы, град.***					***M_1, Н·м***	***M_2, Н·м***	***F, Н***	***Найти***
	α	***β***	***γ***	***δ***	***φ***				
1	30	120	0	120	90	150	150	–	F
2	45	120	30	60	60	100	–	90	M_2
3	60	120	90	75	120	–	120	100	M_1
4	90	150	45	90	120	120	90	–	F
5	90	150	30	60	60	–	100	150	M_1
6	60	90	30	120	90	150	–	100	M_2
7	45	120	30	60	60	120	150	–	F
8	30	150	0	90	120	–	80	100	M_1
9	60	120	45	60	90	100	–	100	M_2
0	45	150	90	75	60	120	90	–	F

Примечание. Построение механизма необходимо начинать с угла α и строить схему механизма, учитывая направление углов.

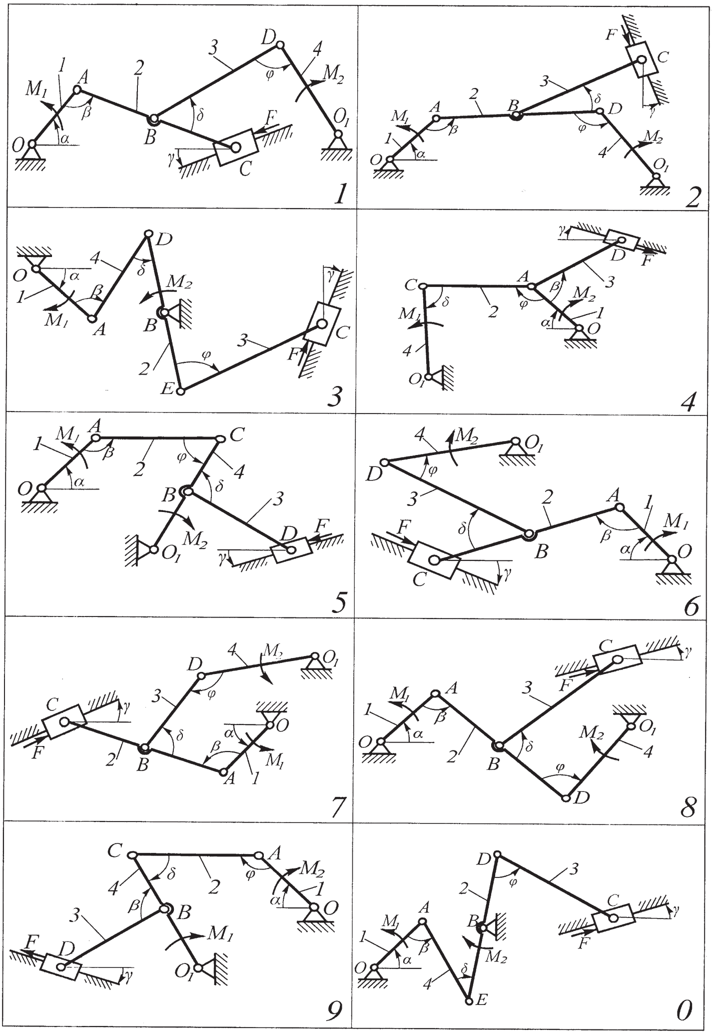


Рис. 3.21

Пример. Расположенный в горизонтальной плоскости механизм (см. рис. 3.22) состоит из четырёх подвижных стержней *1, 2, 3, 4,* ползуна *C*, и в положении, определяемом углами α, β, γ, δ, φ, находится в равновесии под действием двух пар сил с моментами M_1 и M_2 и силы F.

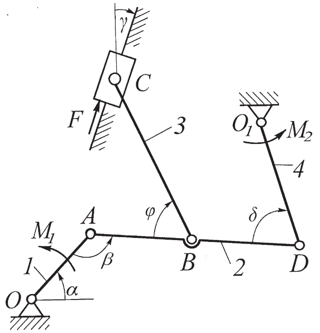


Рис. 3.22

Дано: $\alpha = 0°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$, $\delta = 90°$, $\varphi = 30°$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1$ м, $l_3 = 0{,}8$ м, $l_4 = 0{,}6$ м, $M_1 = 120$ Н·м, $M_2 = 100$ Н·м, $AB = BD$.

Найти: величину и направление силы F.

Решение. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (см. рис. 3.23).

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому (3.13)

$$\sum \delta A_R = 0, \qquad (3.13)$$

где δA_R – элементарная работа активных сил на соответствующих перемещениях.

Чтобы составить уравнение (3.13), сообщим механизму возможное перемещение. Примем за независимое возможное перемещение – $\delta\varphi_1$. Тогда остальные перемещения выразим через $\delta\varphi_1$. Для $\delta\varphi_A$ получим

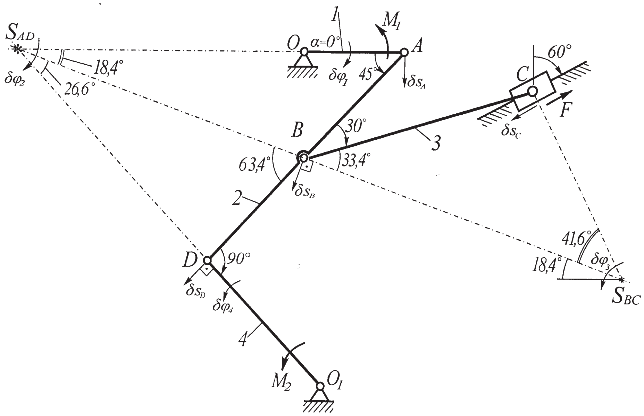


Рис. 3.23

$$\delta s_A = \delta\varphi_1 \cdot l_1.$$

Для того чтобы определить δs_B, применим следствие из теоремы «О проекции возможных перемещений на ось, проведённую через эти точки»: $\delta s_A \cos 45° = \delta s_D$, кроме того $\delta s_D = \delta\varphi_4 l_4 = 0{,}7071\delta\varphi_1 l_1$, значит, $\delta\varphi_4 = \dfrac{0{,}7071\delta\varphi_1 l_1}{l_4}$.

Чтобы определить δs_C, сначала определим δs_B. Для этого найдём мгновенный центр перемещений (МЦП) стержня *AD*, который совпадет с мгновенным центром скоростей (МЦС), для этого к направлениям возможных перемещений точек *A* и *D* проведём перпендикулярные прямые. Точка их пересечений S_{AD} – МЦП стержня. В результате построений получаем равнобедренный прямоугольный треугольник ΔADS_{AD} ($\angle BDO_1 = 90°$, $\angle OAB = 45°$, значит, $\angle DS_{AD}O = 90° -$ $- 45° = 45°$, тогда ΔBDS_{AD} тоже прямоугольный, где $\angle S_{AD}BD = arctg\dfrac{S_{AD}D}{DB} = arctg(2) = 63{,}4°$. Зная положение МЦП, можно записать соотношение:

$$\frac{\delta s_D}{\delta s_B} = \frac{S_{AD}D}{S_{AD}B} = \sin 63{,}4°$$

или

$$\delta s_B = \frac{\delta s_D}{\sin 63{,}4°} = \frac{0{,}7071\delta\varphi_1 l_1}{\sin 63{,}4°} = 0{,}79\delta\varphi_1 l_1 .$$

Теперь для определения δs_C найдём МЦП стержня BC – для этого проведём перпендикулярные прямые к направлениям перемещений точек C и B. Точка их пересечения S_{BC} – МЦС стержня BC. В результате построений в получившимся треугольнике ΔBCS_{BC} углы равны: $\angle CBS_{BC} = 33{,}4°$, $\angle BCS_{BC} = 75°$, $\angle BS_{BC}C = 41{,}6°$. Применяя теорему синусов, можно составить соотношения:

$$\frac{\sin 33{,}4°}{CS_{BC}} = \frac{\sin 75°}{BS_{BC}} = \frac{\sin 41{,}6°}{BC} \text{ или } \frac{BS_{BC}}{CS_{BC}} = \frac{\sin 75°}{\sin 33{,}4°} = 1{,}75 .$$

Из МЦП взаимосвязь между δs_C и δs_A равна: $\frac{\delta s_B}{\delta s_C} = \frac{BS_{BC}}{CS_{BC}} = 1{,}75$, значит, $\delta s_C = \frac{\delta s_B}{1{,}75} = \frac{0{,}79\delta\varphi_1 l_1}{1{,}75} = 0{,}45\delta\varphi_1 l_1 \cdot$

Составляем для механизма уравнение (3.13), в результате получим (3.14)

$$-M_1 \cdot \delta\varphi_1 - F \cdot \delta s_{C\ M2} \cdot \delta\varphi_4 = 0. \tag{3.14}$$

Заменяя $\delta\varphi_4$ и δs_C и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки, получим

$$\delta\varphi_1 \left[-M_1 - F \cdot 0{,}45 \cdot l_1 + M_2 \cdot \frac{0{,}7071 \cdot l_1}{l_4} \right] = 0 .$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, тогда

$$-M_1 - F \cdot 0{,}45 \cdot l_1 + M_2 \cdot \frac{0{,}7071 \cdot l_1}{l_4} = 0,$$

отсюда

$$F = \frac{-M_1 + M_2 \cdot \frac{0{,}7071 l_1}{l_4}}{0{,}45 l_1} = \frac{-120 + 100 \cdot \frac{0{,}7071 \cdot 0{,}4}{0{,}6}}{0{,}45 \cdot 0{,}4} = -404{,}77 \text{ Н}.$$

Ответ: F = – 404,77 *Н*. Знак минус указывает, что сила F направлена противоположно показанному на рисунке.

Задание Д7
Исследование движения механизма с одной степенью свободы

Для механической системы (см. рис. 3.24), расположенной в вертикальной плоскости, определить ускорение груза, имеющего наибольший вес, и натяжение в ветви нити, к которой он прикреплён. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система перемещается из состояния покоя под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*. Радиусы ступеней шкива *1* равны: $R_1 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}1$ м, а радиусы шкива *2* – $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения соответственно равны $\rho_1 = 0{,}1$ м *и* $\rho_2 = 0{,}2$ м. Коэффициент трения скольжения грузов принять $f = 0{,}2$, а массы тел указаны в табл. 3.8, если масса груза равна нулю, то её на чертеже не изображать (шкивы *1* и *2* изображать всегда как части системы).

Таблица 3.8

Вариант	***Масса тел, кг***					***Момент, Н·м***	
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	M_1	M_2
1	2	0	4	0	6	20	0
2	0	5	5	2	0	0	30
3	0	3	0	5	2	40	0
4	4	0	2	4	0	0	60
5	2	0	0	6	5	0	50
6	0	1	4	0	6	30	0
7	0	5	0	3	5	0	40
8	4	0	5	0	3	0	20
9	0	2	4	6	0	40	0
0	4	0	0	2	5	50	0

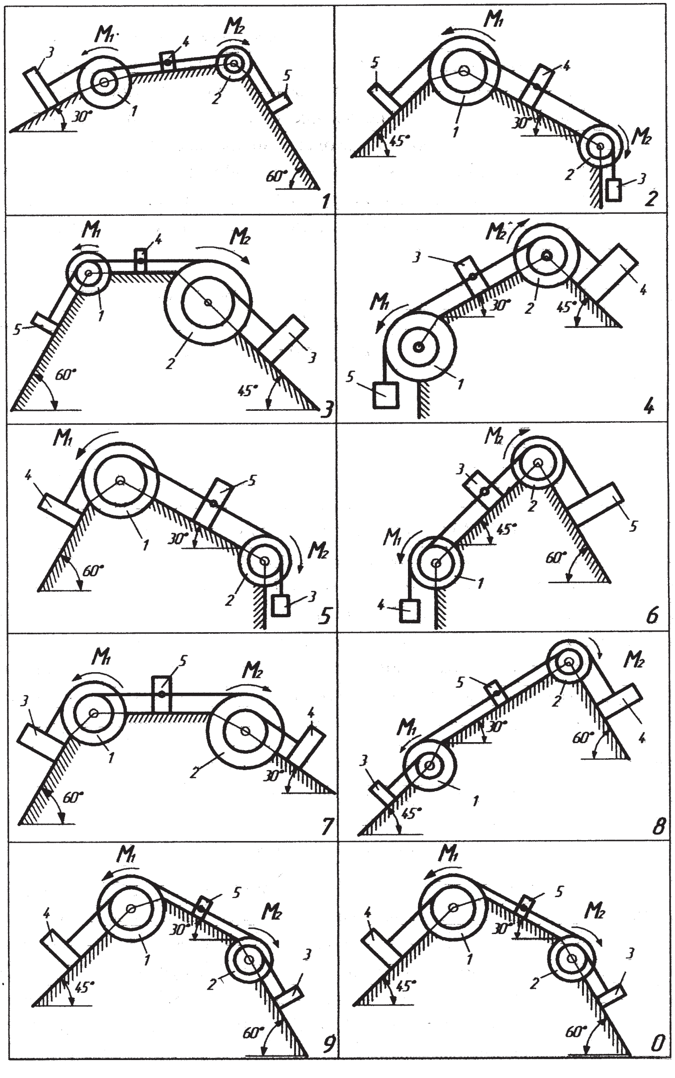


Рис. 3.24

Пример. Механическая система состоит из взаимосвязанных блоков и грузов. Система перемещается в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом *M*, приложенной к блоку *1* (см. рис. 3. 25).

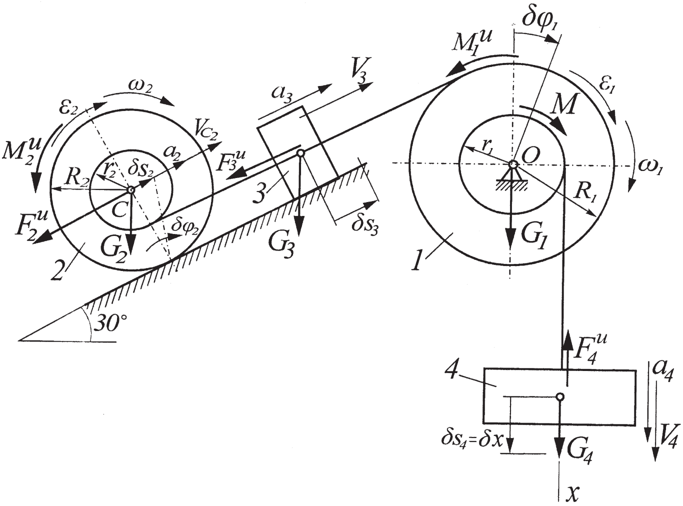


Рис. 3.25

Дано: $m_1 = 2$ *кг,* $m_2 = 1$ *кг,* $m_3 = 0,5$ *кг,* $m_4 = 5$ *кг,* $M = 8$ *Н·м,* $R_1 = 0,2$ *м,* $r_1 = 0,1$ *м,* $R_2 = 0,1$ *м,* $r_2 = 0,05$ *м,* $c_1 = 0,1$ *м и* $c_2 = 0,2$ *м.*

Определить: ускорение груза *4* и натяжение нити, к которой прикреплён груз, пренебрегая трением.

Решение: Ускорение груза *4* можно определить двумя способами.

Первый способ. Для определения a_4 применим общее уравнение динамики (3.15)

$$\sum \delta A_R^a + \sum \delta A_R^u = 0, \qquad (3.15)$$

где δA_R^a – сумма элементарных работ активных сил; δA_R^u – сумма элементарных работ сил инерции.

Изображаем на чертеже активные силы $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$ и пару сил с моментом M, где численно $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$, $G_3 = m_3 g.$, $G_4 = m_4 g$.

Задавшись направлением ускорения a_4, изображаем на чертеже силы инерции $\overline{F}^u{}_4$, $\overline{F}^u{}_3$, $\overline{F}^u{}_2$ и пары сил инерции с моментами $M^u{}_2$ и $\mathrm{M}^u{}_2$ соответственно, величины которых равны (3.16)

$$F_2^u = m_2 a_2,\ F_4^u = m_4 a_4,\ F_3^u = m_3 a_3,\ M_1^u = m_1 \rho_1^2 \varepsilon_1,\ M_2^u = m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2. \quad (3.16)$$

Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (3.14), получим (3.17)

$$G_4 \delta s_4 - F_4{}^u \delta s_4 + M \delta \varphi_1 - M_1^u \delta \varphi_1 - G_3 \sin 30° \cdot \delta s_3 - F_3{}^u \delta s_3 - G_2 \sin 30° \delta s_2 -$$
$$- F_2{}^u \delta s_2 - M_2^u \delta \varphi_2 = 0. \quad (3.17)$$

Выразим все перемещения через δS_4 (3.18)

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta s_4}{r_1},\ \delta S_3 = \frac{\delta s_4 R_1}{r_1},\ \delta S_2 = \frac{\delta s_4 R_1 R_2}{r_1 (R_2 - r_2)},\ \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_4 R_1}{r_1 (R_2 - r_2)}. \quad (3.18)$$

Подставив выражения (3.16) и (3.18) в уравнение (3.17), приведём его к виду

$$\delta s_4 \Bigg[m_4 g - m_4 a_4 + \frac{M}{r_1} - m_1 \rho_1^2 \varepsilon_1 \frac{1}{r_1} - m_3 g sin 30° \frac{R_1}{r_1} - m_3 a_3 \frac{R_1}{r_1} -$$
$$m_2 g \sin 30° \frac{R_1 R_2}{r_1 (R_2 - r_2)} - m_2 a_2 \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 (R_2 - r_2)} - m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2 \frac{R_1}{r_1 (R_2 - r_2)} \Bigg] = 0.$$

Входящие сюда величины ε_1, a_3, a_2, ε_2 выразим через искомую величину a_4:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_4}{r_1},\ a_3 = \frac{a_4 R_1}{r_1},\ a_2 = \frac{a_4 R_1 R_2}{r_1 (R_2 - r_2)},\ \varepsilon_2 = \frac{a_4 R_1}{r_1 (R_2 - r_2)}.$$

Затем, учитывая, что $\delta s_4 \neq 0$, приравняем выражение в скобках к нулю, в результате получим

$$m_4 g - m_4 a_4 + M\frac{1}{r_1} - m_1\rho_1^2 a_4\left(\frac{1}{r_1}\right)^2 - m_3 g sin30^\circ\frac{R_1}{r_1} - m_3 a_4\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^2 - m_2 g\sin 30^\circ\times$$

$$\times\frac{R_1R_2}{r_1(R_2-r_2)} - m_2 a_4\left(\frac{R_1R_2}{r_1(R_2-r_2)}\right)^2 - m_2\rho_2^2 a_4\left(\frac{R_1}{r_1(R_2-r_2)}\right)^2 = 0.$$

Отсюда находим a_4

$$a_4 = \frac{m_4 + \frac{M}{g}\frac{1}{r_1} - m_3 sin30^\circ\frac{R_1}{r_1} - m_2\sin 30^\circ\frac{R_1R_2}{r_1(R_2-r_2)}}{m_4 + m_1\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{R_1\cdot R_2}{r_1\cdot(R_2-r_2)}\right)^2 + m_2\rho_2^2\left(\frac{R_1}{r_1(R_2-r_2)}\right)^2} g =$$

$$= \frac{5 + \frac{8}{9{,}8}\cdot\frac{1}{0{,}1} - 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot\frac{0{,}2}{0{,}1} - 1\cdot 0{,}5\cdot\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot(0{,}1-0{,}05)}}{5 + 2\cdot\left(\frac{0{,}1}{0{,}1}\right)^2 + 0{,}5\cdot\left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot(0{,}1-0{,}05)}\right)^2 + 1\cdot 0{,}2^2\left(\frac{0{,}2}{0{,}1\cdot(0{,}1-0{,}05)}\right)^2} 9{,}8 = 1{,}17\,м/с^2.$$

Второй способ. Для определения ускорения груза *4* применяем уравнение Лагранжа 2 рода. Система имеет одну степень свободы.

Выберем в качестве обобщённой координаты перемещение x тела 4, полагая, что тело перемещается вниз. Составим уравнение Лагранжа (3.19)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = Q_x. \qquad (3.19)$$

Определим кинетическую энергию системы, равную сумме энергий всех тел (3.20)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \qquad (3.20)$$

Тело *1* вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через *O*, тела *3, 4* движутся поступательно, а тело *2* движется плоскопараллельно, тогда (3.21)

$$T_1 = \frac{I_1\omega_1^2}{2},\ T_2 = \frac{m_2 V_{C2}^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2},\ T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2},\ T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2}, \qquad (3.21)$$

где $I_1 = m_1\rho_1^2$, $I_2 = m_2\rho_2^2$.

Все скорости, входящие в (3.21), выразим через обобщённую скорость $V_4 = \dot{x}$. Получаем (3.22)

$$V_4 = \dot{x}, \ \omega_1 = \frac{V_4}{r_1} = \frac{\dot{x}}{r_1}, \ V_3 = \frac{\dot{x}R_1}{r_1}, \ V_{C2} = \frac{\dot{x}R_1R_2}{r_1(R_2 - r_2)}, \ \omega_2 = \frac{\dot{x}R_1}{r_1(R_2 - r_2)}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.21), а затем в (3.20), получим (3.23)

$$T = \frac{m_1\rho_1^2\dot{x}^2}{2r_1^2} + \frac{m_2R_1^2R_2^2\dot{x}^2}{2r_1^2(R_2 - r_2)^2} + \frac{m_2\rho_2^2R_1^2\dot{x}^2}{2r_1^2(R_2 - r_2)^2}\frac{m_3R_1^2\dot{x}^2}{2r_1^2} + \frac{m_4\dot{x}^2}{2} =$$

$$= \frac{2\cdot 0{,}1^2\dot{x}^2}{2\cdot 0{,}1^2} + \frac{1\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}1^2\cdot\dot{x}^2}{2\cdot 0{,}1^2\cdot(0{,}1 - 0{,}05)^2} + \frac{1\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}2^2\cdot\dot{x}^2}{2\cdot 0{,}1^2\cdot(0{,}1 - 0{,}05)^2} + \frac{0{,}5\cdot 0{,}2^2\cdot\dot{x}^2}{2\cdot 0{,}1^2} + \frac{5\cdot\dot{x}^2}{2} = 44{,}5\dot{x}^2.$$

(3.23)

Так как здесь T зависит только от $\dot{x}$, то (3.24)

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = 89\dot{x}, \ \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right) = 89\ddot{x}\cdot \quad (3.24)$$

Определим обобщённую силу Q_x. Для этого изображаем силы, совершающие при движении системы работу, т. е. силы тяжести $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$ и момент сил M. Затем сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщённая координата x получает положительное приращение δx, и покажем перемещение каждого из тел: для тело *3* – δs_3, для тела *1* – $\delta\varphi_1$, для тела *2* – δs_2 и $\delta\varphi_2$. После этого вычислим сумму элементарных работ сил и момента на данных перемещениях. Получим (3.25)

$$\delta A_x = G_4\delta_x + M\delta\varphi_1 - G_3\cdot\sin 30°\,\delta s_3 - G_2\cdot\sin 30°\,\delta s_2. \quad (3.25)$$

Все входящие сюда перемещения надо выразить через δx. Учтя, что зависимости между элементарными перемещениями здесь аналогичны зависимостям (3.18) между соответствующими скоростями, получим (3.26)

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta x}{r_1}, \ \delta s_3 = \frac{\delta x R_1}{r_1}, \ \delta s_2 = \frac{\delta x R_1 R_2}{r_1(R_2 - r_2)}. \tag{3.26}$$

Подставляя эти значения в равенство (3.25) и вынося δx за скобки, найдём, что

$$\delta A_x = \delta x \left(m_4 g + \frac{M}{r_1} - \frac{m_3 g \cdot sin30^\circ R_1}{r_1} - m_2 g \cdot sin30^\circ \frac{R_1 R_2}{r_1(R_2 - r_2)} \right) =$$

$$= \delta x \left(5 \cdot 9{,}8 + \frac{8}{0{,}1} - \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2}{0{,}1} - 1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}1(0{,}1 - 0{,}05)} \right) = 104{,}3\delta x.$$

Коэффициент при δx в полученном выражении и будет обобщённой силой Q_x. Следовательно (3.27)

$$Q_x = 104{,}3. \tag{3.27}$$

Подставляя найденные величины (3.24) и (3.27) в уравнение (3.19), получим $89\ddot{x} = 104{,}3$. Отсюда находим искомое ускорение $a_4 = \ddot{x} = \frac{104{,}3}{89} = 1{,}17$ м/с^2.

Натяжение нити N_{4-1} можно определить двумя способами.

Первый способ: с помощью принципа Даламбера. Принцип Даламбера для груза *4* в векторной форме имеет вид $\overline{N}_{4-1} + \overline{F}_4^{u} + \overline{G}_4 = 0$.

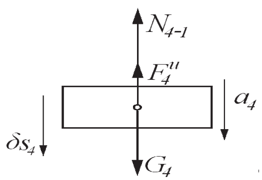


Рис. 3.26

В проекции на ось Y это выражение будет $N_{4-1} + F_4^u - G_4 = 0$, тогда $N_{4-1} = G_4 - F_4^u = m_4 \cdot (g - a_4) = 5 \cdot (9{,}8 - 1{,}17) = 43{,}15$ Н.

Второй способ – с помощью общего уравнения динамики. Составим общее уравнение динамики для груза *4* $G_4 \cdot \delta S_4 - F_4^u \cdot \delta S_4 - N_{4-1} \cdot \delta S_4 = 0$ или $\delta S_4 \cdot (G_4 - F_4^u - N_{4-1}) = 0$. Так как $\delta S_4 \neq 0$, то $G_4 - F_4^u - N_{4-1} = 0$, значит $N_{4-1} = G_4 - F_4^u = m_4 \cdot (g - a_4) = 43{,}15$ Н.

Ответ: $a_4 = 1{,}17$ м/с^2, $N_{4-1} = 43{,}15$ Н.

Задание Д8
Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из взаимосвязанных тел *1, 2, 3* с массами m_1, m_2, m_3. Схемы систем показаны на рис. 3.27, а необходимые данные приведены в табл. 3.9. Определить круговую частоту и период малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей. Найти амплитуду колебаний груза *1*, а также его уравнение движения $y = f(t)$, приняв за начало отсчёта положение покоя груза.

Считать диски сплошными и однородными с радиусами r и $R = 2r = 0{,}2$ м. Тонкий однородный стержень принять длиной $l = 0{,}3$ м. При решении задачи учитывать только пружину, жёсткость которой приведена в табл. 3.9, остальные упругие элементы на схеме не изображать. В начальный момент времени при $t = 0$ учитывать: $y = y_0$ – начальное отклонение груза по вертикали от положения покоя, соответствующее статической деформации пружины; $\dot{y}_0$ – начальная его скорость.

Таблица 3.9

Вариант	***Массы тел, кг***			***Жёсткость пружин, Н/м***			***Начальные условия***	
	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3	y_0, м	$\dot{y}_0$, м/с
1	2	3	2	100	–	–	0,05	4,0
2	3	2	1	–	70	–	0,03	5,0
3	4	1	1	–	–	50	0,04	4,0
4	2	1	1	–	–	100	0,03	0,6
5	3	2	1	–	75	–	0,05	5,0
6	4	3	2	50	–	–	0,04	0,6
7	4	3	2	75	–	–	0,03	4,0
8	3	2	1	–	100	–	0,05	5,0
9	3	1	1	–	–	50	0,04	0,6
0	2	1	1	–	60	–	0,03	4,0

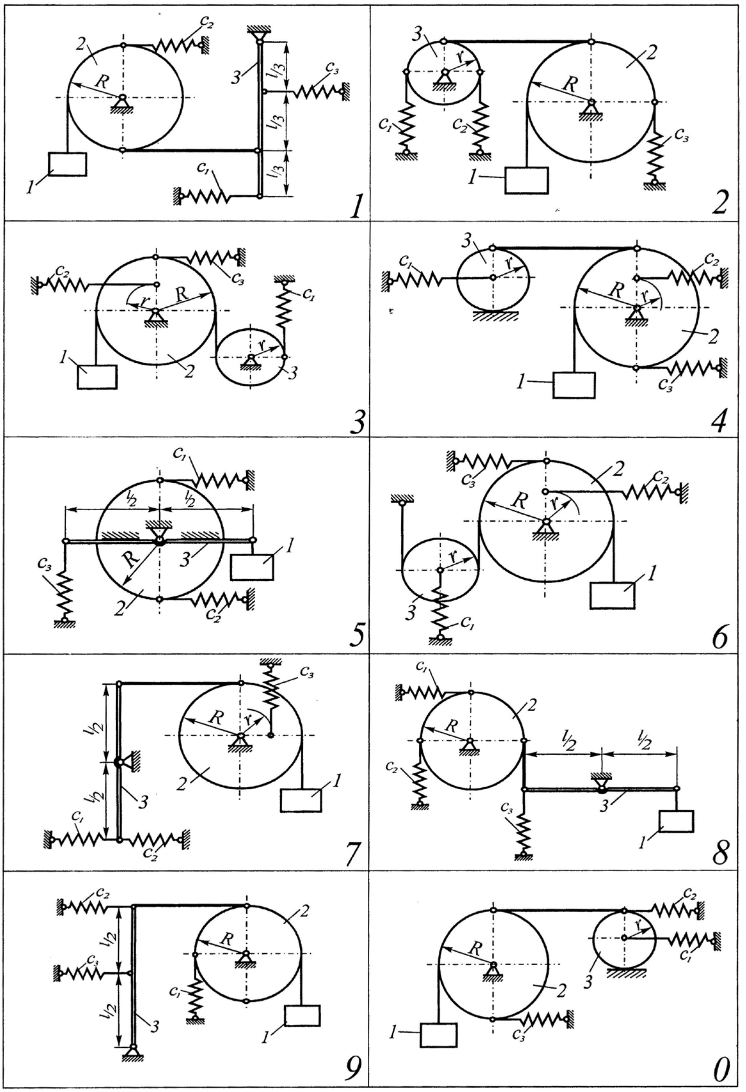


Рис. 3.27

Пример. Для механизма (см. рис. 3.28), расположенного в вертикальной плоскости, определить частоту и период малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей. Найти амплитуду колебаний груза *1*, а также его уравнение движения $y = f(t)$, приняв за начало отсчёта положение покоя груза. Диски и стержень считать сплошными и однородными.

Дано: $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 1$ кг, $m_4 = 2$ кг, $l = 0,6$ м, $R = 0,2$ м, $r = 0,1$ м, $c = 100$ Н/м, $y_0 = 0,05$ м, $\dot{y}_0 = 3$ м/с.

Определить: круговую частоту k и период малых свободных колебаний системы T, амплитуду колебаний груза *1* и его уравнение движения $y = f(t)$.

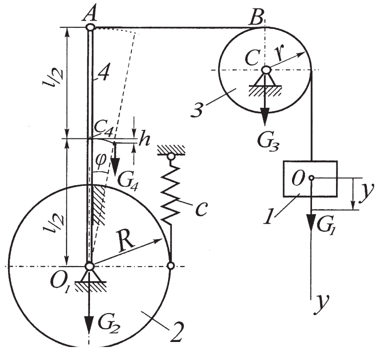


Рис. 3.28

Решение: Данная механическая система имеет одну степень свободы. Для решения задачи воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода для механической системы. Приняв за обобщённую координату вертикальное отклонение y груза *1* от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},$$

где T и $П$ – кинетическая и потенциальная энергия системы.

Определим составляющие этого уравнения, выразив скорости тел через обобщённую скорость $\dot{y}$ и обобщённую координату y. Кинетическая энергия этой системы равна сумме кинетических энергий тел системы

$$\mathrm{T} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Кинетическая энергия тела 1_1, движущегося поступательно, равна

$$T_1 = \frac{m_1\dot{y}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела *3*, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку *C,* определяется как

$$T_3 = \frac{I_3\omega_3^{\ 2}}{2},$$

где $J_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$ – момент инерции тела *3* (сплошного однородного диска); $\omega_3 = \frac{V_1}{r_3} = \frac{\dot{y}}{r_3}$ – угловая скорость тела *3*.

Кинетическая энергия сплошного однородного стержня *4*, жёстко связанного с блоком *2* и вращающегося вокруг неподвижной оси O_1

$$T_4 = \frac{I_4\omega_4^{\ 2}}{2},$$

где $I_4 = \frac{m_4 l^2}{3}$ – момент инерции тонкого однородного стержня, который вращается вокруг одного своего конца; $\omega_4 = \omega_2 = \frac{V_1}{l} = \frac{\dot{y}}{l}$ – угловая скорость тела *4*.

Кинетическая энергия тела *2*, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через O_1

$$T_2 = \frac{I_2\omega_2^{\ 2}}{2},$$

где $I_2 = \frac{m_2 R^2}{2}$ – момент инерции тела *2*; ω_2 – угловая скорость тела *2*.

Таким образом:

$$T=\frac{m_1\dot{y}^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m_2R^2}{2}\cdot\frac{\dot{y}^2}{l^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m_3r^2}{2}\cdot\frac{\dot{y}^2}{r^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m_4l^2}{3}\cdot\frac{\dot{y}^2}{l^2}=\dot{y}^2\left(\frac{3}{2}+\frac{5\cdot 0{,}2^2}{4\cdot 0{,}6^2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\right)=2{,}22\dot{y}^2$$

Так как здесь T зависит только от $\dot{y}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=4{,}44\dot{y};\quad \frac{\partial T}{\partial y}=0;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=4{,}44\ddot{y}.$$

Определим потенциальную энергию $П$ в положении, определяемой координатой y, как работу, совершаемую силой тяжести G и силой упругости пружины из отклоненного положения, когда тело *1* имеет координату y, в нулевое положение, которым считаем положение покоя

$$П = П_I + П_{II}.$$

Для силы тяжести

$$П_I = -G_1y - G_4h,$$

где h – вертикальное смещение центра тяжести стержня *4*, которое вычисляем относительно обобщённой координаты y (см. рис. 3.28)

$$h=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cdot\cos\varphi=\frac{l}{2}(1-\cos\varphi).$$

Ограничиваясь в формуле разложения $\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}$ двумя первыми членами и учитывая, что $\varphi=\frac{y}{l}$, имеем

$$h=\frac{l}{2}\cdot\frac{y^2}{2l^2}=\frac{y^2}{4l}\cdot$$

Таким образом

$$П_I=-m_1gy-m_4g\frac{y^2}{4l}.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна

$$П_{II}=\frac{c(f_1+\lambda)^2}{2}-\frac{cf_1^2}{2},$$

где f_1 – статическая деформация пружины; λ – перемещение точки прикрепления пружины к диску *2*, соответствующее координате y.

Согласно схемы $\frac{\lambda}{y}=\frac{l}{R}$, т. е. $\lambda=\frac{ly}{R}$, то

$$\Pi_{II}=\frac{c\left(f_1+\frac{ly}{R}\right)^2}{2}-\frac{cf_1^2}{2}=\frac{cf_1ly}{R}+\frac{cl^2y^2}{2R^2}.$$

Потенциальная энергия системы в целом равна

$$\Pi=\Pi_I+\Pi_{II}=-m_1gy-m_4g\frac{y^2}{4l}+\frac{cf_1ly}{R}+\frac{cl^2y^2}{2R^2}.$$

Так как в положении покоя, соответствующем статической деформации пружины $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)_{y=0}=0$ или $-m_1\cdot g+\frac{c\cdot f_1\cdot l}{R}=0$, то $m_1g=\frac{cf_1l}{R}$ или $f_1=\frac{m_1gR}{cl}$.

С учётом этого равенства получим окончательное уравнение потенциальной энергии рассматриваемой системы

$$\Pi=-m_4g\frac{y^2}{4l}+\frac{cl^2y^2}{2R^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y}=-m_4g\frac{y}{2\cdot l}+\frac{cl^2y}{R^2}=y\left(-\frac{m_4g}{2\cdot l}+\frac{cl^2}{R^2}\right)\text{ или}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y}=y\left(\frac{m_4g}{2l}-\frac{cl^2}{R^2}\right)=y\left(\frac{2\cdot 9{,}8}{2\cdot 0{,}6}-\frac{100\cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2}\right)=-883{,}6.$$

Определив составляющие уравнения, дифференциальное уравнение движение груза *1* примет вид $4{,}44\ddot{y}+883{,}66\cdot y=0$ или $\ddot{y}+199{,}02y=0$, где $k^2=199{,}02$.

Круговая частота свободных колебаний равна $k=\sqrt{199{,}02}=14{,}1$ с$^{-1}$, период свободных колебаний $T=2\pi/k=$ $=2\cdot 3{,}14/14{,}1=0{,}45$ с.

Интегрируя уравнение свободных колебаний $\ddot{y}+k^2y=0$, получаем уравнение движение тела *1*

$$y=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 найдем уравнение скорости тела *1*

$$\dot{y} = -k \cdot C_1 \cdot \cos kt + k \cdot C_2 \cdot \sin kt$$

и воспользуемся начальными условиями задачи. Из уравнений $y = y(t)$ и $\dot{y} = \dot{y}(t)$ при $t = 0$ имеем $y_0 = C_1$, $\dot{y}_0 = kC_2$, следовательно, $C_1 = y_0 = 0{,}05$, $C_2 = \dot{y}_0 / \mathrm{k} = 3/\ 14{,}1 = 0{,}21$. Подставляя эти значения в уравнение $y = y(t)$, получим $y = 0{,}05\cos(14{,}1t) + 0{,}21\ \sin(14{,}1t)$.

Для представления уравнения движения груза в гармонической форме определим амплитуду A и начальную фазу β колебаний

$$A = \sqrt{{y_0}^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{k}\right)^2} = \sqrt{0{,}05^2 + \left(\frac{3}{14{,}1}\right)^2} = 0{,}216 \text{ м},$$

$$\beta = arctg\ \frac{ky}{\dot{y}_o} = arctg\ \frac{14{,}1 \cdot 0{,}05}{3} = 0{,}235,$$

тогда получим уравнение движение груза в виде гармонического колебания $y = 0{,}305 \sin(14{,}1t + 0{,}235)$.

Ответ: $k = 14{,}1\ \text{с}^{-1}$, $T = 0{,}45$ с, $y = 0{,}05 \cdot \cos(14{,}1t) + 0{,}21 \cdot \sin(14{,}1t)$, $A = 0{,}216$ м.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные законы механики.
2. Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3. Зависит ли вес тела от местонахождения тела на Земле?
4. Какую систему отсчёта называют инерционной?
5. Какие уравнения динамики называются естественными уравнениями движения материальной точки?
6. Каковы две основные задачи динамики точки?

7. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?

8. От каких факторов зависит частота, период и амплитуда свободных колебаний материальной точки?

9. При каких условиях возникает резонанс вынужденных колебаний?

10. Что называют моментом инерции тела относительно плоскости, оси и точки?

11. Что характеризует импульс силы?

12. Сформулируйте теорему об изменении количества движения материальной точки.

13. Почему происходит откат орудия при выстреле?

14. Как определяется момент количества движения точки относительно центра и относительно оси?

15. Что называется кинетическим моментом механической системы?

16. Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?

17. Как вычислить работу силы тяжести и работу силы упругости?

18. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.

19. Какое силовое поле называется потенциальным?

20. Что называется силовой функцией?

21. В чём заключается закон сохранения и превращения механической энергии?

22. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси?

23. Какое явление называется ударом?

24. Что называется коэффициентом восстановления при ударе?

25. Чем характеризуется первая и вторая фазы упругого удара?

26. В чём заключается сущность принципа Даламбера?

27. Что представляют собой обобщённые координаты механической системы?

28. Как формулируется принцип возможных перемещений?

29. Как формулируется золотое правило механики?

30. Какой вид имеет общее уравнение динамики?

31. Что называется обобщённой силой?

32. Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы?

33. Что представляет собой функция Лагранжа?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» базируется на механико-математической подготовке студентов, обеспечиваемой предшествующими курсами: «Высшая математика» и «Физика».

Изучение и усвоение этого курса студентами немеханических специальностей позволяет обеспечить взаимопонимание и взаимодействие инженеров немеханических специальностей с инженерами механического профиля, т. к. современные специалисты работают коллективно в объединяющих их организационных подразделениях.

Задачи проектирования рассматриваются поверхностно, а в большем случае исключаются, поскольку проектирование механических устройств неспециалистами маловероятно. Узкий специалист, не механик, но по своей основной деятельности связанный с техникой, должен грамотно сформулировать задачи проектировщикам или конструкторам, которые должны понять суть задания по созданию новых технических решений, обеспечивающих достижение поставленных целей ведущими специалистами, например, в области энергетики или охраны окружающей среды, горного дела и т. п.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов и решает следующие задачи:

– учит студентов понимать общие принципы проектирования и создания новых типов машин, оборудования;

– производит ознакомление с общими методами технического подхода к исследованию, проектированию и расчёту механических систем, приборов, конструкций;

– расширяет кругозор и формирует инженерный подход к решению технических задач при совместной деятельности специалистов разного профиля;

– формирует навыки проведения технических расчётов, учит обосновывать рациональные подходы при решении технических и технологических проблем;

– прививает навыки работы с технической литературой и справочниками.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособ. для вузов: в 2 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – Москва: Наука, 2007. – 670 с.

2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: учеб. пособие для студ. вузов по техн. специальностям: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 5-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 729 с.

3. Гернет, М. М. Курс теоретической механики: учебник для вузов / М. М. Гернет. – Москва: Высш. шк., 2004, (1986, 1973). – 320 с.

4. Диевский, В. А. Теоретическая механика. Интернет-тестирование базовых знаний: учеб. пособие / В. А. Диевский. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 144 с.

5. Мещерский, Н. В. Сборник задач по теоретической механике / Н. В. Мещерский. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 349 с.

6. Митюшов, Е. А. Теоретическая механика: учеб. для втузов / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. – Москва: Академия, 2011. – 320 с.

7. Павлов, В. Е. Теоретическая механика: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. Е. Павлов, Ф. А. Доронин. – Москва: Академия, 2009. – 320 с.

8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для студ. втузов / А. А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А. А. Яблонского. – 11-е изд., стер. – Москва: Интеграл-Пресс, 2008 (1985, 1977). – 382 с.

9. Сборник коротких задач по теоретической механике / под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 368 с.

10. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С. М. Тарг. – 15-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 2008. – 415 с.

11. Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько [и др.] – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2015. – 302 с.

12. Черкасов, В. Г. Теоретическая механика: учеб. пособие / В. Г. Черкасов. – Чита: ЧитГУ, 2010. – 88 с.

13. Эрдеди, А. А. Теоретическая механика: учеб. пособие / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. – 2-е изд., стер. – Москва: КНОРУС, 2014. – 208 с.

14. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учеб. пособие для вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 13-е изд., испр. – Москва: Интеграл-Пресс, 2009 (2006, 1984). – 603 с.

Приложение

Некоторые сведения из элементарной математики

Выражения тригонометрических функций через стороны прямоугольного треугольника и некоторые их значения

sinα = a/c, cosα = b/c, tgα = a/b,

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

sin 0° = cos 90° = 0;

sin 90° = cos 0° = 1;

sin 30° = cos 60° = 0,5;

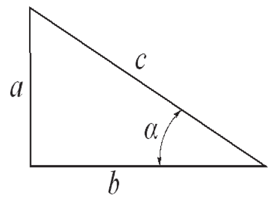
sin 60° = cos 30 ° = 0,867;

sin 45° = cos 45° = 0,707;

tg 30° = ctg 60° = 0,577;

tg 60° = ctg 30 = 1,732;

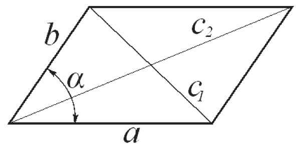
tg 45° = ctg 45° = 1.



Теорема косинусов

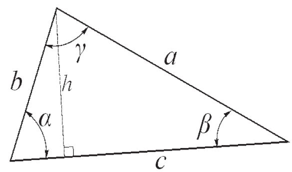
$$c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha};$$

$$c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha}.$$



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Площадь треугольника

$S = c \cdot h/2$, , или через полупериметр P

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}.$$

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = (\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta) : (1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta);$$
$$\mathrm{ctg}\,(\alpha \pm \beta) = (\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1) : (\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha);$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2/\,(\mathrm{ct}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha);$$
$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha;$$
$$\mathrm{tg}2\,\alpha = (2\mathrm{tg}\,\alpha)/(1 - \mathrm{tg}2\,\alpha) = 2\,/\,(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha);$$
$$\mathrm{ctg}2\,\alpha = 0{,}5(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha);$$
$$\sin \alpha / 2 = \sqrt{0{,}5(1 - \cos \alpha)}; \qquad \cos \alpha / 2 = \sqrt{0{,}5(1 + \cos \alpha)};$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha/2 = (\sin \alpha)\,/\,(1 + \cos \alpha); \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha/2 = (1 + \cos \alpha)\,/\,(\sin \alpha);$$
$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha; \qquad 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha.$$

Формула корней приведённого квадратного уравнения

Если $x^2 + px + q = 0$, то $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Для полного квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, его корни определяются как $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Некоторые сведения из высшей математики

Правила дифференцирования

$(u + v)' = u' + v'$; $\quad (u - v)' = u' - v'$;

$(u \cdot v)' = u'v + v'u$; $\quad (cu)' = cu'$;

$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$; $\quad (u/v)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

$y'_x = y'_z \cdot z'_x$.

Формулы дифференцирования

$(c)' = 0$; $\quad (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

$(x)' = 1$; $\quad (ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$; $\quad (ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;

$(xa)' = ax^{a-1}$; $(a^x)' = a^x \ln a$; $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(e^x)' = e^x$; . $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$;

$(\cos x)' = -\sin x$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Таблица интегралов

$$\int x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C; \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int tgx \cdot dx = -\ln|\cos x| + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$$

$$\int ctgx \cdot dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \cdot$$

Учебное издание

Черкасов Валерий Георгиевич
Петухова Ирина Ивановна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Редактор В. К. Демиденко
Вёрстка Г. А. Зенковой

Подписано в печать 25.12.15.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Способ печати цифровой.
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 4,1. Заказ № 24715.
Тираж 100 экз.

ФГБОУ ВПО «Забайкальский государственный университет»
672039, Чита, ул. Александро-Заводская, 30