СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

1. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

1. Если степени с одинаковыми основаниями перемножаются, то основание остаётся тем же самым, а показатели складываются:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Если степени с одинаковыми основаниями делятся, то основание остаётся тем же самым, а показатели вычитаются:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Если степень возводится в степень, то основание остаётся тем же самым, а показатели перемножаются:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

4. Если из степени извлекается корень, то основание остаётся тем же самым, а показатели делятся, причем, степень идёт в числитель, а корень идёт в знаменатель:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

5. Если произведение возводится в степень, то каждый множитель возводится в эту степень:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

6. Если дробь возводится в степень, то и числитель, и знаменатель возводятся в эту степень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

7. Отрицательная степень обращает число:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n},$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

8. Любое ненулевое число a в нулевой степени есть единица:

$$a^0 = 1$$

9. Любое число a в первой степени есть само это число:

$$a^1 = a$$

2. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1) Определение логарифма.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Число c является логарифмом числа b по основанию a, если c — показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$c = \log_a b \Longleftrightarrow a^c = b$$

2) Основные свойства, их надо знать полностью и наизусть.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

2. Сумма логарифмов равна логарифму произведения:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

3. Разность логарифмов равна логарифму частного:

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

4. Показатель степени можно вынести перед логарифмом:

$$\log_a \left(b^c\right) = c \cdot \log_a b$$

5. Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

6. Логарифм единицы по основанию a равен нулю:

$$\log_a 1 = 0$$

7. Логарифм числа a по основанию a равен единице:

$$\log_a a = 1$$

3) Свойства-следствия. Их можно доказать самостоятельно, поэтому можно не запоминать, но желательно помнить, что такие свойства есть.

1. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$
2. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$
3. $\log_{a^n} (b^m) = \dfrac{m}{n} \log_a b$
4. $\log_{a^n} (b^n) = \log_a b$
5. $\log_a a^m = m$
6. $\log_{a \cdot b} c = \dfrac{1}{\log_c a + \log_c b}$
7. $\log_{\frac{a}{b}} c = \dfrac{1}{\log_c a - \log_c b}$
8. $\log_{a \cdot b} a + \log_{a \cdot b} b = 1$
9. $\log_{\frac{a}{b}} a - \log_{\frac{a}{b}} b = 1$
10. $\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{\log_d b}{\log_d a} = \log_a b$
11. $\log_c b \cdot \log_d a = \log_d b \cdot \log_c a$
12. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

3. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

1) Основные формулы. Именно они часто используются на ЕГЭ, дополнительных вступительных экзаменах (ДВИ) в вузы, а также на олимпиадах.

Суммы и разности квадратов, кубов, и т. д.

1. Сумма квадратов: $a^2 + b^2 =$ не раскладывается
2. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
3. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
4. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Квадраты, кубы и т. д. двучленов $a + b$ и $a - b$

1. Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2) Обобщения формул. Используются не всегда. Порой применяются при решении олимпиадных задач.

1. Для любого натурального n выполняется

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + a^2b^{n-3} + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$$

2. Для любого нечётного n выполняется

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1}b^0 - a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 - \ldots$$
$$\ldots + a^2b^{n-3} - a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$$

3. Формула бинома Ньютона. Для любого натурального n выполняется

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

Здесь $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Если имеется степень разности, то её надо воспринимать как $(a-b)^n = (a+(-b))^n$ и в правой части формулы вместо b ставить $-b$, стараясь верно учитывать знак этой компоненты при возведении в разные степени. К примеру:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

4. ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ С КОРНЕМ

Простейшее иррациональное уравнение с корнем натуральной степени имеет вид: $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.
При нечётном n оно равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^n$.
При чётном n оно равносильно системе уравнения и неравенства

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, чтобы избавиться от корня, нужно возвести обе части уравнения в степень, равную степени корня.
Если корень был чётной степени, то при его вычислении получается неотрицательное значение, следовательно, правая часть исходного уравнения должна быть неотрицательна. В случае же нечётной степени правая часть может быть отрицательна.
Для решения уравнения с корнем чётной степени необходимо сначала решить уравнение $f(x) = (g(x))^n$, а потом проверить решения, подставив их в неравенство $g(x) \geqslant 0$.

Пример. $\sqrt{2-x} = x$. Возводим в квадрат обе части уравнения: $2 - x = x^2$. Переносим всё в одну сторону и решаем квадратное уравнение: $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Выполняем проверку: при $x = 1$ получаем равенство $\sqrt{2-1} = 1$ и это равенство верное; при $x = -2$ получаем равенство $\sqrt{2-(-2)} = -2$ и это равенство неверное. В итоге, ответ: $x = 1$.

5. ПРОСТЕЙШЕЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Простейшее показательное уравнение имеет вид:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}.$$

Оно равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Иначе говоря, если в правой и левой частях уравнения основания одинаковы, то и показатели одинаковы.
Более сложные уравнения надлежит пытаться привести к простейшему.

Пример. $2^{x^2} = 3$. Приведём правую часть к виду, когда основание степени равно 2, пользуясь основным логарифмическим тождеством, которое позволяет любое положительное число представить в виде степени с нужным нам положительным и не равным единице основанием: $b = a^{\log_a b}$. Получим: $2^{x^2} = 2^{\log_2 3}$. Так как основания одинаковы, то и показатели одинаковы: $x^2 = \log_2 3$. Так как правая часть уравнения положительна (это следует из того, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ положительна при $x \in (1; \infty)$ и отрицательна при $x \in (0; 1)$, а аргумент логарифма равен 3 и он попадает в промежуток $(1; \infty)$), то уравнение имеет решение и оно имеет вид: $x_1 = \sqrt{\log_2 3}$, $x_2 = -\sqrt{\log_2 3}$. Итак, ответ: $x = \pm\sqrt{\log_2 3}$.

6. ПРОСТЕЙШЕЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Оно равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, если в правой и левой частях уравнения основания логарифмов одинаковы, то и их аргументы одинаковы. Более сложные уравнения надлежит пытаться привести к простейшему.
Чтобы решить простейшее логарифмическое уравнение, достаточно решить уравнение-следствие $f(x) = g(x)$, а затем проверить, чтобы его корни удовлетворяли двум неравенствам $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то есть, чтобы аргументы логарифмов в исходном уравнении после подстановки в них корней уравнения-следствия были положительны.

Пример. $\log_2(x^2 - x) = 1$. Для начала представим число 1, находящееся в правой части уравнения, в виде логарифма по основанию 2. Для этого воспользуемся правилом, что любое число k можно представить в виде логарифма по нужному нам основанию a следующим образом (запомнить!!!):

$$k = \log_a a^k.$$

Иначе говоря, чтобы число k заменить на логарифм по основанию a, мы пишем этот логарифм и его основание, а чтобы получить агумент логарифма, нужно основание возвести в степень, равную исходному числу: a^k. Отсюда следует, что $1 = \log_2 2^1$ или $1 = \log_2 2$.
Исходное уравнение принимает вид: $\log_2 (x^2 - x) = \log_2 2$. Так как основания логарифмов одинаковы, то и их аргументы одинаковы: $x^2 - x = 2$. Перенеся все слагаемые в левую часть, получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, корни которого $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Проверка: в *исходное* уравнение подставим корни уравнения следствия. При $x_1 = -1$ получаем $\log_2 ((-1)^2 - (-1)) = 1$ или $\log_2 2 = 1$, это равенство верное. При $x_1 = 2$ получаем $\log_2 (2^2 - 2) = 1$ или $\log_2 2 = 1$, это равенство тоже верное. Итак, решение уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

7. ПРОСТЕЙШЕЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Простейшее логарифмическое неравенство имеет вид:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x).$$

Если $a > 1$, то оно равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то оно равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x); \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Если в правой и левой частях неравенства основания логарифмов одинаковы, то логарифмы можно убрать, и если их основание больше единицы, то знак неравенства остаётся прежним, а если их основание больше нуля, но меньше единицы, то знак неравенства меняется на противоположный.

Второе и третье неравенства в системах обозначают ОДЗ — области допустимых значений неизвестного x, ибо аргументы логарифмов $f(x)$ и $g(x)$ должны быть строго положительны.

Чтобы решить простейшее логарифмическое неравенство, нужно по отдельности решить три неравенства в соответствующей системе, а затем найти пересечение решений. Более сложные неравенства обычно сводятся к простейшему.

Пример. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > \log_{\frac{1}{2}}(4x - 8)$.
Так как у логарифмов основания одинаковы и меньшие единицы, то логарифмы можно снять, при этом знак неравенства поменяется, поэтому первое неравенство:

$$x^2 - x - 2 < 4x - 8 \text{ или } x^2 - 5x + 6 < 0$$

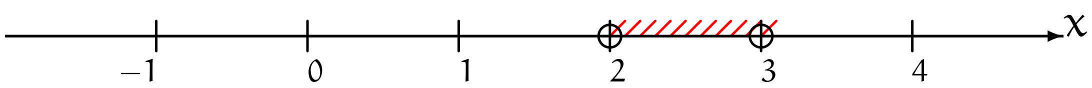
Учитывая ОДЗ, получаем ещё два неравенства:

$$x^2 - x - 2 > 0 \text{ и } 4x - 8 > 0$$

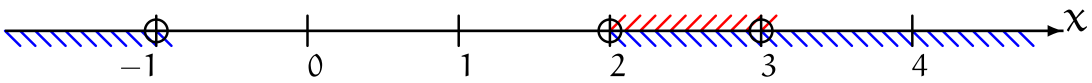
Полная система неравенств, равносильная исходному неравенству, имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0, \\ x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 8 > 0. \end{cases}$$

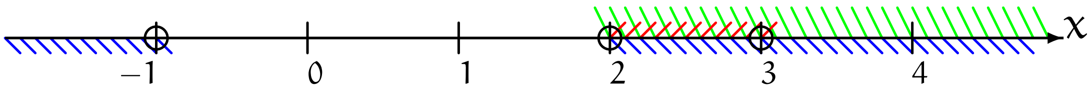
Решаем неравенства по отдельности.
У квадратного трехчлена в первом неравенстве $x^2 - 5x + 6 < 0$ корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Выставляем их на числовую прямую и методом интервалов определяем промежутки, являющиеся решением неравенства:



У квадратного трехчлена во втором неравенстве $x^2 - x - 2 > 0$ корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Выставляем их на числовую прямую и методом интервалов определяем промежутки, являющиеся решением неравенства. Добавляем штриховку на первоначальный рисунок:



Третье неравенство линейное, и его решение $x > 2$. Кладем последнюю штриховку:



Пересечение штриховок — интервал $(2; 3)$, это и есть ответ.

8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ. СВОД

1. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

2. Формулы о тангенсе и котангенсе угла.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

3. Тригонометрические функции суммы или разности углов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

4. Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса двойного угла.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

5. Преобразование суммы функций в произведение функций.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

6. Преобразование произведения функций в сумму функций.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

9. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

К формулам приведения относятся формулы, упрощающие выражения

$$\sin(\varphi \pm x), \quad \cos(\varphi \pm x), \quad \operatorname{tg}(\varphi \pm x), \quad \operatorname{ctg}(\varphi \pm x),$$

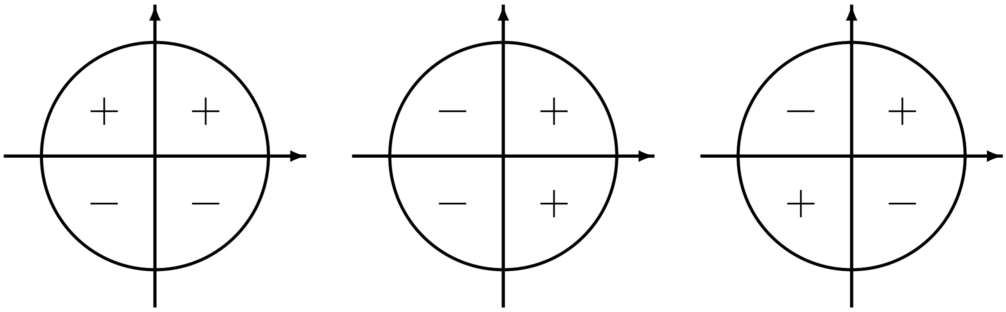
где φ — это угол типа $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\ldots$ или типа $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, $\ldots$ Углы первого типа назовём *целыми*, а второго типа — *половинчатыми*.

Имеется алгоритм раскрытия данных выражений.

1. Сначала спрашиваем себя: угол φ является целым или половинчатым? Если он целый, то тригонометрическая функция остается той же, а если половинчатый, то тригонометрическая функция меняется: $\sin$ взаимно меняется с $\cos$, а tg взаимно меняется с ctg. После записи функции сразу же дописываем аргумент x.

2. Далее нужно на единичной окружности построить угол $\varphi \pm x$ так, чтобы x был маленький, менее чем 90°. Необходимо узнать знак ИСХОДНОЙ функции в той четверти, куда попал угол, и поставить этот знак перед записью результата.

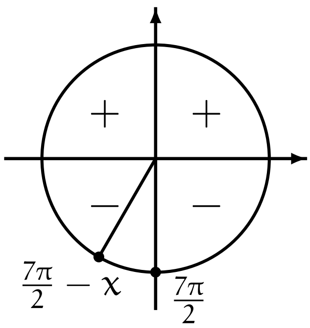
Напомним знаки тригонометрических функций:



sin　　　　cos　　　　tg и ctg

Пример. Упростим выражение $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)$.

Угол $\dfrac{7\pi}{2}$ является половинчатым, поэтому в результате будет $\cos x$. Определим, какой знак ставить перед этим результатом. Построим угол $\dfrac{7\pi}{2} - x$, рассматривая знаки ИСХОДНОЙ функции, а именно, sin:



Так как точка, соответствующая углу $\dfrac{7\pi}{2} - x$, находится в третьей четверти, и в данной четверти синус отрицателен, то перед результатом надо поставить знак минус. В итоге:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$