**Учебник**

**Указания к выполнению контрольной работы 2**

**Тема 1.** Функции нескольких переменных.

**Тема 3.** Определенный интеграл

**Тема 4.** Несобственные интегралы.

***Примеры решения некоторых типовых задач***

**Неопределенный интеграл**

*Пример 1.* Найти .

*Решение*.

.

*Пример 2.* Найти .

*Решение*.

.

*Пример 3.* Найти .

*Решение*.



*Пример 4.* Найти .

*Решение*. Преобразуя подынтегральное выражение так, чтобы можно было воспользоваться формулой 10, имеем



Здесь .

*Пример 5*.Найти *.*

*Решение*. Данный пример демонстрирует довольно часто используемый прием деления числителя на знаменатель.



*Пример 6.* Найти .

*Решение*. Привести интеграл к табличному дает возможность введения новой переменной интегрирования. Используя равенство , получаем

.

*Пример 7.* Найти .

*Решение*. Введем новую переменную интегрирования, используя равенство , тогда

.

*Пример 8.* Найти .

*Решение*. Заметим, что , следовательно,

 *Пример 9.* Найти .

*Решение*. С целью введения новой переменной воспользуемся равенством , тогда



*Пример 10.* Найти .

*Решение*. Учитывая, что , преобразуем подынтегральное выражение к нужному виду и находим интеграл:



*Пример 11.* Найти .

*Решение*. Данный интеграл не является табличным, для его нахождения воспользуемся заменой переменной:





Иногда замена переменной производится следующим образом. Пусть требуется найти интеграл , сделаем замену, принимая , где  - непрерывная функция с непрерывной производной, тогда  и интеграл принимает вид

.

После интегрирования переменную  нужно заменить через *х*, исходя из равенства .

*Пример 12.* Найти .

*Решение*. Чтобы избавиться от иррациональности, следует сделать замену , тогда , при этом получаем



*Интегрирование по частям*

Формула интегрирования по частям имеет вид:

,

где  - дифференцируемые функции.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения функции *u*  на дифференциал другой функции – *dv*, при этом целесообразно в качестве *u* выбирать функцию, упрощающуюся при дифференцировании ( и т.д.). Если же подынтегральное выражение есть произведение целой рациональной функции на тригонометрическую функцию или показательную функцию, то за *u* следует принимать целую рациональную функцию. Применение формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда интеграл  будет проще исходного интеграла  или когда он будет ему подобен.

*Пример 13.* Найти .

*Решение*. Пусть , тогда

.

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем



*Замечание*. При нахождении функции *v* по ее дифференциалу *dv* мы можем брать любую произвольную постоянную. Удобно считать эту постоянную равной нулю.

*Пример 14.* Найти .

*Решение*. Применим формулу интегрирования по частям, тогда





Здесь формула интегрирования по частям была применена дважды.

Иногда интегрирование по частям приводит к уравнению относительно искомого интеграла.

*Пример 15.* Найти .

*Решение*. При нахождении данного интеграла вновь используем

формулу интегрирования по частям.





Рассмотрим равенство:

.

Перенося  в левую часть и разделив на 2, окончательно получим



Следует заметить, что далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому далее рассмотрим классы функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции. Центральное место занимает класс рациональных функций, так как к интегрированию рациональных функций сводится интегрирование многих иррациональных и тригонометрических функций

**Интегрирование рациональных функций**

Рациональной функцией или рациональной дробью называется дробь вида

,

где  - многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби, т.е.

,

где  - многочлен, а  - правильная рациональная дробь.

Рассмотрим простейшие рациональные дроби:

1. ;

2. , где *m* – целое положительное число, большее единицы;

3. , квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, т.е. ;

4. , где *п* – целое положительное число

большее единицы, а квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

*Интегрирование простейших дробей первых двух типов*

1. 

2. 



*Интегрирование простейших дробей третьего типа*

Пусть дан интеграл этого типа

.

В знаменателе подынтегральной функции выделяем полный квадрат



а затем подстановкой  приведем интеграл к виду

,

легко сводящемуся к табличным интегралам. Поясним выше изложенный прием на примере.

*Пример 1*. Найти .

*Решение*. В знаменателе подынтегральной функции , следовательно, имеем простейшую дробь третьего типа. Так как

,

(использовали часто применяющийся прием «выделения полного квадрата»), то

.

Пусть ,

тогда



где 

*Интегрирование простейших дробей четвертого типа*

В интеграле этого типа в знаменателе выделяют полный квадрат.

Подстановкой  приводят интеграл к виду

.

Первый интеграл правой части легко приводится к табличному интегралу, а второй находится с помощью рекуррентной формулы.

Пусть , тогда

.

С помощью рекуррентной формулы интеграл  сводится к интегралу , затем к ,



Известно (основная теорема алгебры), что всякую правильную рациональную дробь  можно разложить на сумму простейших дробей, причем единственным образом, для этого требуется знаменатель разложить на простые множители, т. е. представить его в виде произведения многочленов первой степени или квадратных трехчленов, не имеющих действительных корней. Решая уравнение , получаем ,

где множители первой степени соответствуют действительным корням, а множители второй степени – парам мнимых сопряженных корней. После этого правильная рациональная дробь разлагается на простейшие по формуле



где  - неопределенные (неизвестные) коэффициенты, некоторые из них могут равняться нулю.

Каждому множителю в разложении знаменателя  соответствует столько простейших слагаемых дробей, какова его кратность .

Для нахождения неопределенных коэффициентов все простейшие дроби приводят к общему знаменателю  и приравнивают числители обеих частей полученного равенства. Затем сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях *х*, что приводит к системе уравнений, решая которую находят значения неизвестных коэффициентов.

Рассмотрим примеры, решения которых проиллюстрируют все

выше сказанное.

*Пример 2*. Разложить данные дроби на сумму простейших дробей:

а) ; б) ; в) ; г) .

*Решение*.

а) Корни знаменателя действительные, различные: Каждому корню в разложении соответствует одна дробь, поэтому разложение имеет вид:

.

б) Корни знаменателя - ,первый корень кратности 3, поэтому в разложении ему соответствует сумма трех дробей:

.

в) Корень знаменателя - , имеет кратность 2, квадратный трехчлен - не имеет действительных корней и не может быть разложен на множители, значит

.

г) Разложим знаменатель на множители, тогда

.

*Пример 3*. .

*Решение*. Имеем правильную рациональную дробь. Разложим знаменатель дроби на множители: .

Подынтегральную дробь представим в виде суммы простейших, т.е.

.

Чтобы найти неизвестные коэффициенты *A*, *B*, *C*, приведем дроби справа к общему знаменателю, тогда

.

Дроби равны, у них равны знаменатели, значит, числители тоже равны, т.е.

.

Так как многочлены слева и справа тождественно равны, то их значения равны при любых значениях *х.*

Придавая *х* значения, равные корням знаменателя данной дроби,

получим уравнения для определения коэффициентов.

При  имеем .

При  имеем .

Для нахождения *В* положим *х* равным любому числу, например, пусть , тогда , откуда *В* = 1. Следовательно,

.

Переходя к интегралу, получим

 *Пример 4*. .

*Решение*. Имеем неправильную рациональную дробь. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

. Здесь 2*х* – целая часть, 1 – остаток.

Далее, данную дробь представим в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби, а полученную в правой части правильную рациональную дробь – в виде суммы простейших дробей, т.е.



.

В правой части последнего равенства приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители, после чего будем иметь

.

В данном случае действительный корень только один, поэтому способ подстановки частных значений для нахождения коэффициентов будет не удобен. Найдем коэффициенты, используя известный факт: *два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях х*. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:



Отмечая за чертой слева, при каких *х* сравниваются коэффициенты, получаем систему уравнений:



Решая систему, получаем 

Окончательное разложение данной дроби на простейшие имеет вид: .

Далее, переходим к интегрированию, т.е.



*Пример 5*. .

*Решение*. В этом примере некоторую трудность представляет разложение знаменателя на множители. Полезно знать следующий искусственный прием. Подбором определяем один корень знаменателя. При *х* = 1многочлен  обращается в 0, значит *х* = 1 – корень многочлена и на основании следствия из теоремы Безу этот многочлен делится без остатка на разность , т.е. знаменатель можно записать в виде:

.

Квадратный трехчлен  не имеет действительных корней  и на более простые множители во множестве действительных чисел не может быть разложен.

Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших и найдем неопределенные коэффициенты:

,

.

Заметим, что при *х* = 1 последнее равенство принимает вид: , найдем *А,* т.е. *А* = 1. Далее, раскрыв скобки, приводя многочлен в правой части к стандартному виду и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях *х*, получим систему уравнений, решив которую получим . Подставляя найденные коэффициенты в разложение, получаем

.

Перейдем к интегрированию.

.

Второй интеграл правой части найдем отдельно, выделяя в числителе производную знаменателя, т.е.

 Окончательно имеем



В заключении заметим, что неопределенный интеграл от любой рациональной функции выражается через элементарные функции, т.е. «берется в конечном виде».

**Интегрирование тригонометрических функций**

*Универсальная подстановка*. Рассмотрим интегралы вида

, где *R* – рациональная функция *sinx*, *cosx*. Интегралы такого вида подстановкой



приводятся к интегралам от рациональной дроби нового аргумента *t*; при такой подстановке;

.

*Пример 1*. .

*Решение*. Воспользуемся универсальной подстановкой.

Пусть , тогда



Универсальная подстановка, хотя и дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида , но часто приводит к сложным рациональным дробям, поэтому на практике ей пользуются лишь в крайних случаях, чаще используют следующие *частные подстановки*:

1) если функция  нечетна относительно синуса, т.е. , то применима подстановка

;

2) если функция  нечетна относительно косинуса, т.е. , то применима подстановка

;

3) если функция  четна относительно синуса и косинуса, т.е. , то применима подстановка

 или .

*Пример 2*. .

*Решение*. Здесь подынтегральная функция нечетная относительно

косинуса, поэтому применим подстановку .

При этом  и



*Замечание*. При интегрировании тригонометрических функций иногда можно добиться результата, не применяя метод подстановки, а используя только тождественные преобразования подынтегрального выражения.

Рассмотрим решение предыдущего примера другим способом.

 и т.д.

*Пример 3*. .

*Решение*.



*Пример 4*. .

*Решение*. Применим подстановку , так как подынтегральная функция является четной относительно синуса и косинуса (синус и косинус имеют четные показатели степеней).



Наряду с указанными подстановками полезно знать также другие приемы интегрирования тригонометрических функций.

*Интегрирование функций вида* ,

где оба показателя *т* и *п* – четные неотрицательные числа (в частности, один из них может быть равным нулю). Для вычисления интеграла следует применить формулы понижения степени, т.е.

.

*Пример 5*. .

*Решение*. Воспользуемся формулой понижения степени, тогда

 Аналогичным образом можно найти интегралы ,  и другие.

*Интегрирование функций вида*

**

где *т* и *п* - целые положительные числа, находятся с помощью следующих тригонометрических формул:

;

;

.

*Пример 6*. .

*Решение*. Преобразуя произведение синуса на косинус в произведение, имеем , отсюда



**Интегрирование иррациональных функций**

*Интегралы вида *,

где *R* - рациональная функция, *p*, *q*, *s*, *t* - целые числа, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

,

где *п* – наименьшее общее кратное показателей корней, т.е. чисел .

*Интегралы вида* ,

где *R* - рациональная функция, *p*, *q*, *s*, *t* - целые числа, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

,

где *п* – наименьшее общее кратное показателей корней, т.е. чисел .

*Пример 1*. .

*Решение*. Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6, значит *п* = 6 и применима подстановка .

=



.

*Пример 2*. .

*Решение*. Сделаем подстановку , тогда ,

.

Выделяя в подынтегральной функции целую часть, приведем интеграл к виду:

 Интегралы от некоторых иррациональных функций с помощью выделения полного квадрата в подкоренном выражении можно привести сразу к табличным интегралам. Покажем этот прием на следующих примерах.

*Пример 3*. .

*Решение*. Выделим в подынтегральном выражении полный квадрат, тогда



*Пример 4*. .

*Решение*. Здесь выделение полного квадрата приведет к использованию другой табличной формулы.



Некоторые интегралы с помощью соответствующих подстановок приводятся к интегралам от тригонометрических функций.

 подстановкой  или ;

 подстановкой , или ;  подстановкой ; или .

Такими подстановками мы избавляемся от иррациональности в подынтегральных выражениях.

Если  (*а* > 0), то

.

Если , то

.

Если , то

.

*Пример 5*. .

*Решение*. Подкоренное выражение имеет вид , поэтому в воспользуемся подстановкой .



.

Чтобы перейти к переменной *х*, произведем преобразования: , отсюда ,

.

Окончательно имеем 

*Пример 6*. .

*Решение*.





Перейдем к старой переменной следующим образом.

Так как , значит ,

.

Итак, 

Обратим внимание, этот интеграл мы уже находили методом интегрирования по частям.

*Пример 7*. .

*Решение*. Здесь воспользуемся заменой , тогда  и  =

=

Для того, чтобы вернуться к переменной *х*, воспользуемся формулой , тогда  и окончательно имеем

.

Следует заметить, что рассмотренные в последних примерах интегралы иногда берутся по частям, иногда более простой заменой.

*Пример 8*. .

*Решение*. В данном случае нет смысла вводить тригонометрическую подстановку, так как интеграл легко приводится к «табличному», действительно



*Интегрирование дифференциального бинома*

Интегралы вида , где *т*, *п*, *р* – рациональные числа, называются интегралами от дифференциальных биномов. Такие интегралы берутся лишь в трех случаях с помощью специальных подстановок.

*Подстановки Чебышева*

1. Пусть *р* – целое число, тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

,

где *s* – наименьшее общее кратное знаменателей дробей *т* и *п*.

2. Пусть  - целое число. В этом случае данный интеграл рационализуется с помощью подстановки

,

где *s* – знаменатель дроби *р.*

3*.* Пусть ** - целое число, тогда к рациональной функции приводит подстановка

,

где *s* – знаменатель дроби *р.*

*Пример 9*. .

*Решение*. Приведем интеграл к виду дифференциального бинома и воспользуемся одной из подстановок Чебышева (если это возможно). . Здесь  – целое, наименьшее общее кратное чисел 2 и 4 равно 4, значит можно воспользоваться первой подстановкой Чебышева.







*Пример 10*. .

*Решение*. .

Здесь  - целое число, применим вторую подстановку

Чебышева: .





*Пример 11*. .

*Решение*. Запишем подынтегральное выражение в виде дифференциального бинома и выберем соответствующую подстановку.

. Имеем , отсюда  и можем применить третью подстановку Чебышева, т.е. ,

тогда



Заметим, если не выполняется ни одно из трех перечисленных выше условий, то найти неопределенный интеграл не представляется возможным, в таких случаях говорят: «интеграл не берется в конечном виде».

Итак, необходимо знать, что имеются элементарные функции, неопределенные интегралы от которых не выражаются через элементарные функции. К таким интегралам относятся: , - «интегральный синус»;  - «интегральный косинус»;  - «интегральный логарифм» и другие.

Эти и другие интегралы определяют новые виды функций, которые не являются элементарными, но широко используются как в математике, так и в других областях знаний.

**Определенный интеграл**

*Формула Ньютона-Лейбница*

,

где  - первообразная функция .

Формула Ньютона-Лейбница дает основной способ вычисления определенных интегралов.

*Замечание*. Между неопределенными и определенными интегралами существует связь, нахождение одних и вычисление других предусматривает отыскания первообразной функции, поэтому техника вычисления определенных интегралов базируется на методах нахождения неопределенных интегралов. Однако следует помнить, что неопределенный интеграл – это множество первообразных функций, а определенный интеграл – это число.

*Пример 1*. 

*Пример 2*. 

*Пример 3* 

.

**Методы вычисления определенных интегралов**

*Интегрирование по частям в определенном интеграле*

Метод интегрирования по частям может быть применен к вычислению определенных интегралов, при этом используется формула



*Пример 4*. Вычислить .

*Решение*. Используем метод интегрирования по частям.

Пусть , тогда .





*Замена переменной в определенном интеграле*

Если на отрезке  функции  - непрерывны и , то



*Пример 5*. Вычислить .

*Решение*. Вычислим интеграл с помощью замены переменной.

Пусть , тогда  или 

Заменим пределы интегрирования:

при  ; при   Возвращаясь к интегралу имеем



*Определенный интеграл от четной или нечетной функции*

*по симметричному промежутку*

Если  - четная функция, то

,

а если  - нечетная функция, то

.

Например, , 

**Несобственные интегралы**

Интегралы с бесконечными пределами

Если функция  интегрируема на любом отрезке , где

, то для любого *b*  существует и тем лучше

выражает величину, которую следует принять в качестве интеграла от  по промежутку , чем больше , поэтому полагают

 (1)

Интеграл  называется *сходящимся*, если существует конечный предел в правой части и называется *расходящимся*, если указанный предел не существует или равен бесконечности.

Пусть первообразная функция  подынтегральной функции  известна, тогда сходимость или расходимость интеграла  можно установить по формуле Ньютона-Лейбница:

.

Аналогично, если функция  интегрируема на любом отрезке , где , то

 (2)

Если функция  интегрируема на любом отрезке , где , то,

 (3)

где *с* – некоторое действительное число.

Интеграл  называется с*ходящимся*, если существуют и конечны оба предела в правой части равенства (3), и *расходящимся*,

если не существует или равен бесконечности хотя бы один из них.

*Пример 1*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. Первообразная подынтегральной функции находится непосредственным интегрированием, поэтому

, следовательно, несобственный интеграл сходится и равен единице, т.е. .

*Пример 2*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. Используя формулу (1), имеем

.

Следовательно, интеграл расходится.

*Пример 3*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. По формуле (3) имеем



,

т.е. интеграл расходится.

*Пример 4*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. Используя формулу (3), получаем



значит, интеграл сходится.

Интегралы от неограниченных функций

Если функция  непрерывна на промежутке  и имеет разрыв второго рода в точке , т.е. , то полагают

. (4)

Интеграл  называется *сходящимся*, если существует конечный предел в правой чисти равенства (4), если указанный предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяется интеграл от функции , имеющей разрыв второго рода в правом конце промежутка :

. (5)

Если же функция  непрерывна на промежутке , а в точке имеет разрыв второго рода, то полагают

. (6)

Интеграл называется *сходящимся*, если существуют и конечны оба предела в правой чисти равенства (6), и *расходящимся*, если не существует или равен бесконечности хотя бы один из них.

*Пример 5*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. Функция  имеет разрыв второго рода в точке , поэтому данный интеграл – несобственный, для выяснения его сходимости воспользуемся формулой (4), тогда

,

т.е. интеграл расходится.

*Пример 6*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв второго родав точке . Воспользуемся формулой (5):

,

следовательно, интеграл сходится, т. е.

.

*Пример 7*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. Так как внутри отрезка интегрирования существует точка , где подынтегральная функция имеет разрыв второго рода, то воспользуемся формулой (6) и представим интеграл как сумму двух слагаемых: .

Вычислим каждый интеграл отдельно:

.

Следовательно, на промежутке  интеграл расходится.

.

Значит, на промежутке  интеграл также расходится.

Таким образом, данный интеграл расходящийся.

*Пример 8*. Вычислить несобственный интеграл  или доказать его расходимость.

*Решение*. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв второго рода в обоих концах промежутка интегрирования, поэтому разобъем интеграл на два интеграла и применим формулы (4), (5).





**Форма промежуточного контроля**

**зачет**

Перечень примерных вопросов для подготовки к зачету.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ ( 2с)

1.Определение функции нескольких переменных. Область определения.

2.Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

3.Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных.

4. Частные производные и полный дифференциал второго порядка.

5.Уравнеие касательной плоскости и нормали к поверхности.

6.Неявные функции. Дифференцирование неявных функций.

7.Экстремумы функции нескольких переменных.

8.Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.

9.Таблица неопределенных интегралов.

10.Непосредственное интегрирование.

11.Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле

12.Интегрирование рациональных функций.

13.Интегрирование иррациональных функций.

14. Интегрирование тригонометрических функций.

15.Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла.

16.Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.

17.Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

18.Приложения определенных интегралов.

19.Несобственные интегралы с бесконечными пределами.

20. Несобственные интегралы от разрывных функций.

**Оформление письменной работы согласно МИ 4.2-5/47-01-2013** [Общие требования к построению и оформлению учебной текстовой документации](http://zabgu.ru/files/html_document/pdf_files/fixed/Normativny%27e_dokumenty%27_i_obrazcy%27_zayavlenij/Obshhie_trebovaniya_k_postroeniyu_i_oformleniyu_uchebnoj_tekstovoj_dokumentacii.pdf)

**Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

**Основная литература**

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т. I: – М.: Интеграл – Пресс, 2004. – 416 с.
3. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.
4. Баврин И.И. Высшая математика: Учеб. для студ. естественнонаучных специальностей педагогических вузов. – 2-е изд., стер. – М.: Изд. центр «Академия»; Высш. шк., 2001. – 616 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1999. – 304 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2004.
7. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2004.
8. Глазырин В.В., Лесков В.П., Лескова Т.М., Чистякова С.А. Высшая математика частьII (учебное пособие для заочников).