

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Забайкальский государственный университет»
(ФГБОУ ВПО «ЗабГУ»)

УДК 517.956
№ государственной регистрации 01201461151
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ЗабГУ, д-р техн. наук
Иванов
16 г.




ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках государственного задания №2014/255, проект № 2603

по теме
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
В ОБЛАСТЯХ С ПЛЕНОЧНЫМИ СТРУКТУРАМИ

(промежуточный, этап №2)

Руководитель НИР
д-р физ.-мат. наук, доцент

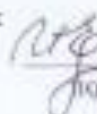
 29.01.2016 С. Е. Холодовский
подпись, дата

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы
профессор,
д-р физ.-мат. наук
доцент

 28.01.2016 С. Е. Холодовский (введение, разделы 1-3, 5,
подпись, дата заключение)

Совсоисполнители:
кандидат физ.-мат. наук
доцент

 29.01.2016 И. А. Ефимова (раздел 4)
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 31 с., 38 источников.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, МНОГОСЛОЙНЫЕ ПЛЕНОЧНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ, ПЛЕНОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НАГРУЗКИ

Объектом исследования являются краевые задачи математической физики в областях с пленочными структурами в виде многослойных пленочных включений, пленочных границ областей, точечных масс, упругих контактов и т.д.

Целью работы является разработка аналитических методов решения краевых задач с пленочными структурами и их применение к решению новых нестандартных задач математической физики.

Результаты работы. В 2015 г.:

- разработан новый метод решения краевых задач математической физики в областях, ограниченных многослойными пленками,

- проведено математическое обоснование разработанного ранее «метода свертывания разложений Фурье» и нового метода: для рассмотренных задач с пленками доказаны теоремы существования и единственности, а также доказана сходимость рядов и интегралов в полученных формулах,

- разрабатывается новая тема, связанная с приложениями квазиинтегралов Фурье, введенных в рассмотрение руководителем проекта в 2004 г. [31],

- налажено сотрудничество с Институтом природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН и с физической лабораторией Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского (УИЦ БФЛ), что позволило найти новые направления приложений полученных результатов с пленками.

Полученные результаты опубликованы в одной монографии «Задачи математической физики в областях с пленочными включениями» [32] и в 5 статьях [33]-[37]. Кроме того, одна статья принята к печати в журнале «Математические заметки» из перечня Web of Science, SCOPUS (выйдет в свет в марте 2016 г. [38]).

Результаты работы могут быть использованы

- при исследовании динамических процессов в композитных материалах, содержащих наноразмерные пленочные включения и пленочные покрытия,

- в расчетах колебательных процессов с сосредоточенными нагрузками и с упругими контактами составных элементов (мостов, балок, антенн и т.д.),

- в задачах теплоизоляции зданий и других объектов,

- в задачах экранирования загрязненных зон.

Развитие исследования. Разработанными методами можно эффективно решать новые задачи в областях с пленочными включениями и пленочными границами. К ним относятся задачи математической физики с криволинейными многослойными пленками, задачи о колебании объектов с комбинациями сосредоточенных нагрузок и упругих контактов, задачи в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных анизотропных областях при наличии пленочных включений и др.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	6
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	9
1 Краевые задачи в областях с наноструктурными границами (покрытиями).	
Теорема двойственности	9
2 Метод сведения задач в областях с пленочными границами	
к обыкновенным дифференциальным уравнениям	12
2.1 Задачи с обобщенными граничными условиями 1-го типа	12
2.2 Задачи с обобщенными граничными условиями 2-го типа	16
3 Решение краевых задач с двухслойной пленкой	
Теорема существования и единственности	20
4 Решение краевых задач для уравнения Лапласа в полуплоскости	
с неограниченными граничными функциями. Метод квазиинтегралов Фурье	22
5 Решение некоторых прикладных задач. Температурные волны в курумах	25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	27
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	28
Список работ исполнителей НИР по данному гос. заданию за 2015 г.	31

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях большой практический и научный интерес имеет исследование различных динамических процессов (теплопереноса, фильтрации жидкости, электродинамики, диффузии) в материалах, содержащих пленочные включения и пленочные покрытия, которые моделируют естественные и искусственные экраны, дренажи, проводники, электроды, мембраны, изоляторы и т.д. Развитие нанотехнологий связано с разработкой новых материалов с тонкими пленочными покрытиями. Кроме того, в технике широкое применение находят композитные материалы, содержащие пленочные включения и пленочные покрытия (нанокомпозиты). В задачах экологии при экранировании загрязненных зон, а также в задачах теории фильтрации для управления потоками используются пленочные структуры в виде сильно проницаемых дренажей и слабо проницаемых завес-экранов. В радиоэлектронике в связи с миниатюризацией радиоаппаратуры применяются пленочные элементы.

Пленочные включения, несмотря на свой незначительный объем, могут существенно искажать картину динамических процессов, протекающих в указанных материалах.

Также большой интерес имеют задачи о колебании протяженных составных объектов с сосредоточенными нагрузками, точечными массами, упругими прокладками и т.д. К указанным задачам относятся задачи о колебании нагруженных балок, пролетов мостов, крыльев самолетов, антенн и т.д.

Сказанное выше определяет актуальность темы исследования.

Решению краевых задач в областях с пленочными включениями посвящены работы Пилатовского В.П., Н.И. Мухелишвили Н.И., Абдурахманов И.М., Симоненко И.Б., Крутитского П.А, Номировского Д.А., Сетуха А.В., Колтона Д. и других [1]-[10]. Как правило, решения краевых задач с пленочными включениями ищутся в виде тех или иных потенциалов с неизвестной плотностью при интегрировании по контуру пленки, что приводит к системе интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. В работах Коляно Ю.М. условия на пленке включены в дифференциальное уравнение, коэффициенты которого являются обобщенными функциями типа дельта-функции с особенностью на пленке, что приводит к достаточно сложной задаче [11].

При решении задач о движении струн с точечными массами применяются методы рядов Фурье, преобразований Фурье, численное моделирование, асимптотические методы, методы теории усреднения [12]-[20]. При этом основная проблема заключается в нахождении спектра собственных частот.

Следует отметить, что численные методы для решения краевых задач с пленками и сосредоточенными нагрузками малоэффективны, т.к. требуют достаточно мелкой сетки аппроксимации в окрестности пленок, где имеет место резкое изменение параметров.

В данном проекте разработаны методы, позволяющие получать точные аналитические решения краевых задач для широкого класса линейных уравнений (эллиптических, гиперболических и параболических) в областях с пленочными включениями и пленочными границами [21]-[30]. В 2015 г. руководителем проекта разработан новый эффективный метод решения краевых задач в областях с многослойными пленочными границами [32], [36]. Указанный метод, как и разработанный ранее «Метод свертывания разложений Фурье» [21]-[24], позволяет выводить формулы, выражающие решения задач с пленками через решение аналогичных классических задач без пленок с граничными условиями первого или второго рода при сохранении уравнения и граничных функций. При этом в новом методе вывод указанных формул сводится к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В итоге решения задач с пленками сводятся к решению аналогичных задач без пленки и к решению указанного обыкновенного дифференциального уравнения. При этом если известно решение некоторой классической задачи без пленок, то по выведенным формулам получаем решения серии аналогичных задач с различными пленками. Полученные решения имеют вид достаточно простых формул, т.к. содержат сложность лишь от наличия пленок, а сложность от классической составляющей задачи включена в ее известное решение.

Кроме того, в 2015 г. руководителем проекта получено математическое обоснование выведенных формул [32], [35]: доказаны теоремы существования и единственности и получены условия сходимости интегралов в полученных решениях задач с многослойными пленками. Также доказана теорема двойственности, согласно которой первые и вторые типы краевых задач с многослойными пленками на границе связаны между собой определенными формулами, т.е. зная решение одной из этих задач, по указанным формулам получаем решение другой задачи, при этом сильно- и слабо проницаемые прослойки в многослойной пленке меняются ролями [32], [33].

Разрабатывается новая тема, связанная с приложениями квазиинтегралов Фурье [31], [37]. Метод квазиинтегралов Фурье позволяет решать краевые задачи для граничных функций, которые в бесконечности могут возрастать по произвольному степенному закону, что существенно расширяет класс решаемых задач. При этом классический метод Фурье для указанных задач неприменим.

В 2015 г. налажено сотрудничество с Институтом природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН. В лаборатории криогенеза указанного института исследуются темпера-

турные волны в курумах (в крупных обломочных отложениях скальных горных пород), которые изобилуют разломами и трещинами. Моделируя указанные трещины многослойными пленками, можно для решения задач теплопроводности в курумах эффективно применять разработанные по гос.заданию методы [34].

Кроме того, налажены связи с Учебно-исследовательским центром «Брянской физической лаборатории» Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского (УИЦ БФЛ). В указанной лаборатории в частности проводятся эксперименты по теплопроводности кристаллов с пленочными покрытиями, что дает возможность сравнить теоретические формулы, полученные по гос.заданию, с экспериментальными данными.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Краевые задачи в областях с наноструктурными границами (покрытиями). Теорема двойственности [32], [33]

В пространстве $(x, y_1, \dots, y_m) \in R^{m+1}$ рассмотрен произвольный полуцилиндр $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, граница которого $x = 0$ (основание полуцилиндра) является многослойной пленкой, состоящей из чередующихся сильно- и слабо проницаемых прослоек. Сильно- и слабо проницаемые прослойки моделируются бесконечно тонкими слоями соответственно с бесконечно большой и бесконечно малой проницаемостью [21]-[30]. При этом i -я сильно проницаемая прослойка характеризуется параметром A_i , где $k_0 l \rightarrow A_i$, $l \rightarrow 0$ – толщина, а $k_0 \rightarrow \infty$ – проницаемость слоя, вырождающегося в сильно проницаемую прослойку. Аналогично параметр j -й слабо проницаемой прослойки B_j определяется как предел $l/k_0 \rightarrow B_j$, где $l \rightarrow 0$ – толщина, а $k_0 \rightarrow 0$ – проницаемость слоя, вырождающегося в слабо проницаемую прослойку.

Показано, что на многослойной пленке $x = 0$ можно рассматривать обобщенные граничные условия двух типов и соответственно два типа краевых задач: при заданном значении искомого потенциала (условие 1-го типа) и при заданном значении нормальной скорости (условие 2-го типа) на внешней стороне пленки при $x = +0$. В граничных условиях первого типа последняя прослойка $x = +0$ должна быть слабо проницаемой, а в граничных условиях второго типа – сильно проницаемой, т.к. для граничных условий первого (второго) типа добавление сильно (слабо) проницаемой прослойки $x = +0$ не меняет этого граничного условия. При этом в зависимости от количества сильно- и слабо проницаемых прослоек в пленке порядок производных от искомой функции в обобщенных граничных условиях может быть произвольным. Отметим, что при отсутствии пленок, т.е. при $A_i = B_j = 0$ (при идеальном контакте с внешней средой), граничные условия 1-го и 2-го типа совпадают с классическими граничными условиями соответственно 1-го и 2-го рода. При этом классическое граничное условие третьего рода является обобщенным граничным условием 1-го типа на однослойной слабо проницаемой пленке.

Пусть пленка $x = 0$ состоит из $2n$ чередующихся сильно- и слабо проницаемых прослоек с параметрами соответственно $A_1, B_2, \dots, A_{2n-1}, B_{2n}$, где $A_1 \geq 0$ – параметр первой

прослойки $x = -0$ и пленку замыкает слабо проницаемая прослойка $x = +0$ с параметром $B_{2n} > 0$. Рассмотрим для функции $u(x, y)$ в полуцилиндре D класс задач 1-го типа

$$\partial_x^2 u + Lu = 0, \quad Mu|_{(x,y) \in S} = 0, \quad (1.1)$$

$$u + F_{2n} u|_{x=-0} = \varphi(y), \quad (1.2)$$

где $\partial_x^r = \partial^r / \partial x^r$; L – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным y_i , т.е. оператор L не содержит производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x ; S – боковая поверхность полуцилиндра D ; M (как и L) является линейным оператором по переменным y_i , в частности M – оператор классических граничных условий 1-го, или 2-го, или 3-го рода; оператор F_{2n} строится по рекуррентным формулам [30]:

$$F_{2i-1}u = F_{2i-2}u, \quad G_{2i-1}u = A_{2i-1} \partial_x^2 (u + F_{2i-2}u) + G_{2i-2}u,$$

$$F_{2i}u = B_{2i}(\partial_x u + G_{2i-1}u) + F_{2i-1}u, \quad G_{2i}u = G_{2i-1}u,$$

$F_0 = G_0 = 0$, $i = 1, \dots, n$. Здесь операторы L , M считаются такими, для которых соответствующая классическая задача без пленки вида

$$\partial_x^2 f + Lf = 0, \quad Mf|_{(x,y) \in S} = 0, \quad f|_{x=0} = \varphi(y)$$

корректна. Для волнового уравнения (1.1) обобщенное граничное условие (1.2) соответствует наличию комбинации точечных масс и упругих контактов на границе $x = 0$.

Наряду с данной задачей рассмотрим для функции $v(x, y)$ в полуцилиндре D аналогичный класс задач 2-го типа:

$$\partial_x^2 v + Lv = 0, \quad Mv|_{(x,y) \in S} = 0, \quad (1.3)$$

$$\partial_x v + \tilde{G}_{2n} v|_{x=0} = \psi(y), \quad (1.4)$$

где оператор \tilde{G}_{2n} строится по рекуррентным формулам [30]:

$$\tilde{F}_{2i-1} v = \tilde{B}_{2i-1} (\partial_x v + \tilde{G}_{2i-2} v) + \tilde{F}_{2i-2} v, \quad \tilde{G}_{2i-1} v = \tilde{G}_{2i-2} v,$$

$$\tilde{F}_{2i} v = \tilde{F}_{2i-1} v, \quad \tilde{G}_{2i} v = \tilde{A}_{2i} \partial_x^2 (v + \tilde{F}_{2i-1} v) + \tilde{G}_{2i-1} v,$$

$\tilde{F}_0 = \tilde{G}_0 = 0$, $i = 1, \dots, n$. Здесь граница $x = 0$ является многослойной пленкой, состоящей из чередующихся слабо- и сильно проницаемых прослоек с параметрами соответственно вида $\tilde{B}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{B}_{2n-1}, \tilde{A}_{2n}$, где $\tilde{B}_1 \geq 0$ – параметр первой слабо проницаемой прослойки $x = -0$, $\tilde{A}_{2n} > 0$ – параметр последней сильно проницаемой прослойки $x = +0$.

Доказано [32], [33], что задачи 1-го и 2-го типа связаны друг с другом в следующем смысле.

Теорема 1. Если функция $u(x, y)$ является решением задачи 1-го типа (1.1), (1.2), то функция $v = \partial_x u$ является решением задачи 2-го типа (1.3), (1.4), в которой $\tilde{B}_i = A_i$, $\tilde{A}_j = B_j$, $\psi(y) = -L\varphi(y)$, и обратно, если $v(x, y)$ является решением задачи 2-го типа (1.3), (1.4), то функция $u = \partial_x v$ является решением задачи 1-го типа (1.1), (1.2), в которой $A_i = \tilde{B}_i$, $B_j = \tilde{A}_j$, $\varphi(y) = \psi(y)$.

В указанных задачах сильно- и слабо проницаемые прослойки меняются ролями. Из теоремы следует, что зная решение $v(x, y)$ задачи 2-го типа, по формуле $u = \partial_x v$ можно найти решение задачи 1-го типа при сохранении граничной функции $\psi(y) = \varphi(y)$. Однако для нахождения решения задачи 2-го типа по известному решению $u(x, y)$ задачи 1-го типа необходимо определить граничную функцию $\varphi(y)$ по заданной граничной функции $\psi(y)$ из дифференциального уравнения: $\psi(y) = -L\varphi(y)$.

2 Метод сведения задач в областях с пленочными границами к обыкновенным дифференциальным уравнениям [32], [36]

2.1 Задачи с обобщенными граничными условиями 1-го типа

Рассмотрим полуцилиндр $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, основанием которого является многослойная пленка $x = 0$, состоящая из $2r$ чередующихся сильно- и слабо проницаемых прослоек с параметрами соответственно $A_1, B_2, \dots, A_{2r-1}, B_{2r}$. Рассмотрим в D класс краевых задач первого типа при заданном потенциале $\varphi(y)$ на внешней стороне пленки вида

$$\partial_x^2 u + Lu = 0, \quad Mu|_S = 0, \quad x < 0, \quad (2.1.1)$$

$$u + F_{2r}u|_{x=0} = \varphi(y), \quad (2.1.2)$$

где оператор F_{2r} строится по рекуррентным формулам

$$F_{2i-1}u = F_{2i-2}u, \quad G_{2i-1}u = A_{2i-1}\partial_x^2(u + F_{2i-2}u) + G_{2i-2}u, \quad (2.1.3)$$

$$F_{2i}u = B_{2i}(\partial_x u + G_{2i-1}u) + F_{2i-1}u, \quad G_{2i}u = G_{2i-1}u,$$

$$F_0 = G_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad S = \partial D.$$

Пусть известно решение $f(x, y)$ аналогичной классической задачи в полуцилиндре D без пленки с граничным условием первого рода на основании $x = 0$ при сохранении граничной функции $\varphi(y)$ (2.1.2):

$$\partial_x^2 f + Lf = 0, \quad Mf|_S = 0, \quad f|_{x=0} = \varphi(y), \quad (2.1.4)$$

при этом задача (2.1.4) считается корректной. Выразим решение задачи (2.1.1), (2.1.2) через функцию $f(x, y)$.

Из равенств (2.1.3) следует, что оператор $F_{2r}u$ граничного условия (2.1.2) является линейным дифференциальным оператором по переменной x с постоянными коэффициентами порядка $2r - \nu$, где $\nu = 0$ и $\nu = 1$ соответственно при $A_1 > 0$ и $A_1 = 0$.

Рассмотрим для функции $u(x, y)$ при $-\infty < x < 0$ обыкновенное линейное дифференциальное уравнение по переменной x с постоянными коэффициентами, аналогичное граничному условию (2.1.2):

$$u + F_{2r}u = f(x, y), \quad (2.1.5)$$

где y – параметр, $f(x, y)$ – решение задачи (2.1.4). Доказано [32], что характеристический многочлен уравнения (2.1.5) имеет вид

$$d(\lambda) = \lambda p_r(\lambda) + 1, \quad (2.1.6)$$

где функция $p_r(\lambda) > 0$ строится по рекуррентным формулам

$$q_i = \lambda A_{2i-1}(1 + \lambda p_{i-1}) + q_{i-1}, \quad p_i = B_{2i}(1 + q_i) + p_{i-1},$$

$i = 1, \dots, r$; $p_0 = q_0 = 0$, при этом $d(\lambda) > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Функция $d(\lambda)$ (2.1.6) является многочленом степени $\mu = 2r - \nu$. Пусть многочлен $d(\lambda)$ (2.1.6) имеет корни $-\gamma_j$ кратности m_j : $d = c(\lambda + \gamma_1)^{m_1} \cdots (\lambda + \gamma_p)^{m_p}$. Отсюда ограниченное в полуцилиндре D решение уравнения (2.1.5) имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{kj}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(x-t, y) dt. \quad (2.1.7)$$

где c и b_{kj} – постоянные. Полученная функция (2.1.7) является решением исходной задачи с многослойной пленкой (2.1.1), (2.1.2) [32].

Для двухслойной пленки типа (A, B) обобщенное граничное условие (2.1.2) имеет вид

$$AB\partial_x^2 u + B\partial_x u + u|_{x=-0} = \varphi(y). \quad (2.1.8)$$

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ является решением корректной задачи (2.1.4) и удовлетворяет вместе с производными, входящими в уравнение (2.1.4), условию

$$|f(x, y)| = O(e^{\gamma|x|}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad 0 < \gamma < \min \operatorname{Re} \gamma_j, \quad (2.1.9)$$

то решение задачи (2.1.1), (2.1.8) существует, единственно и в случаях $T \neq 0$ и $T = 0$ строится соответственно по формулам

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(x-t, y) \left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right) dt \quad (2.1.10)$$

и

$$u(x, y) = \frac{1}{AB} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_3 t} t f(x-t, y) dt, \quad (2.1.11)$$

где

$$\gamma_j = \frac{B + (-1)^j \sqrt{T}}{2AB}, \quad j=1,2, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2A}, \quad T = B(B-4A).$$

Операторы (2.1.10), (2.1.11) отображают решения $f(x, y)$ классических задач (2.1.4) на решения задач (2.1.1), (2.1.8) с пленкой. Обратный оператор имеет вид

$$f(x, y) = AB\partial_x^2 u + B\partial_x u + u.$$

В случае трехслойной пленки типа (B_1, A, B_2) обобщенное граничное условие (2.1.2) имеет вид

$$s\partial_x^3 u + AB_2\partial_x^2 u + (B_1 + B_2)\partial_x u + u|_{x=-0} = \varphi(y), \quad (2.1.12)$$

где $s = B_1 AB_2$, при этом характеристический многочлен (2.1.6) равен

$$d(\lambda) = s\lambda^3 + AB_2\lambda^2 + (B_1 + B_2)\lambda + 1. \quad (2.1.13)$$

Теорема 3. Если функция $f(x, y)$ является решением корректной задачи (2.1.4) и удовлетворяет вместе с производными, входящими в уравнение (2.1.4), условию (2.1.9), где $-\gamma_i$ – корни многочлена (2.1.13), то решение задачи (2.1.1), (2.1.12) существует, единственно и в случаях $d(\lambda) = s(\lambda + \gamma_1)(\lambda + \gamma_2)(\lambda + \gamma_3)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$; $d(\lambda) = s(\lambda + \gamma_1)^2(\lambda + \gamma_2)$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $d(\lambda) = s(\lambda + \gamma_1)^3$ строится соответственно по формулам

$$u(x, y) = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(x-t, y) \left(\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}} \right) dt,$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\gamma_{21}^2 s} \int_0^\infty f(x-t, y) [e^{-\gamma_1 t} (\gamma_{21} t - 1) + e^{-\gamma_2 t}] dt$$

и

$$u(x, y) = \frac{1}{2s} \int_0^\infty f(x-t, y) e^{-\gamma_1 t} t^2 dt,$$

где s имеет вид (2.1.12), $\gamma_{ji} = \gamma_j - \gamma_i$.

Обратный оператор, отображающий решения задач (2.1.1), (2.1.12) на решение классической задачи (2.1.4), имеет вид $f(x, y) = s\partial_x^3 u + AB_2\partial_x^2 u + (B_1 + B_2)\partial_x u + u$.

Решение задач с неоднородными условиями вида

$$\partial_x^2 w + Lw = H(x, y), \quad Mw|_S = h(x, y),$$

$$w + F_{2r} w|_{x=0} = \varphi_1(y)$$

определяется равенством $w = u + v$, где $v(x, y)$ – решение аналогичной классической задачи в D без пленки:

$$\partial_x^2 v + Lv = H(x, y), \quad Mv|_S = h(x, y), \quad v|_{x=0} = 0,$$

а функция $u(x, y)$ – решение рассмотренной задачи (2.1.1), (2.1.2) с граничной функцией $\varphi(y) = \varphi_1(y) - F_{2r} v|_{x=0}$.

2.2 Задачи с обобщенными граничными условиями 2-го типа

Рассмотрим в полупространстве $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ класс краевых задач второго типа:

$$\partial_x^2 u + Lu = 0, \quad Mu|_S = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\partial_x u + G_{2r} u|_{x=0} = \psi(y), \quad (2.2.2)$$

где оператор G_{2r} определяется из рекуррентных формул [30]:

$$F_{2i-1} u = B_{2i-1} (\partial_x u + G_{2i-2} u) + F_{2i-2} u, \quad G_{2i-1} u = G_{2i-2} u, \quad (2.2.3)$$

$$F_{2i} u = F_{2i-1} u, \quad G_{2i} u = A_{2i} \partial_x^2 (u + F_{2i-1} u) + G_{2i-1} u,$$

$F_0 = G_0 = 0$, $i = 1, \dots, r$. В данном случае граница $x = 0$ является многослойной пленкой, состоящей из $2r$ чередующихся слабо- и сильно проницаемых прослоек с параметрами соответственно $B_1, A_2, \dots, B_{2r-1}, A_{2r}$. Пусть известно решение $f(x, y)$ аналогичной классической задачи в D без пленки с граничным условием второго рода при $x = 0$ с сохранением граничной функции $\psi(y)$ (2.2.2):

$$\partial_x^2 f + Lf = 0, \quad Mf|_S = 0, \quad \partial_x f|_{x=0} = \psi(y). \quad (2.2.4)$$

Выразим решение задачи (2.2.1), (2.2.2) через функцию $f(x, y)$.

Из равенств (2.2.3) следует, что оператор $G_{2r}u$ граничного условия (2.2.2) является линейным дифференциальным оператором по переменной x с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим для функции $u(x, y)$ при $-\infty < x < 0$ обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x вида

$$u + \hat{G}_{2r}u = f(x, y), \quad (2.2.5)$$

где $f(x, y)$ – решение задачи (2.2.4), y – параметр, оператор $\hat{G}_{2r}u$ строится по рекуррентным формулам

$$F_{2i-1}u = B_{2i-1}(\partial_x u + G_{2i-2}u) + F_{2i-2}u, \quad \hat{G}_{2i-1}u = \hat{G}_{2i-2}u,$$

$$\hat{F}_{2i}u = \hat{F}_{2i-1}u, \quad \hat{G}_{2i}u = A_{2i}(\partial_x u + \hat{F}_{2i-1}\partial_x^2 u) + \hat{G}_{2i-1}u,$$

$\hat{F}_0 = \hat{G}_0 = 0$, $i = 1, \dots, r$, т.е. $G_{2r}u = \partial_x \hat{G}_{2r}u$, при этом граничное условие на пленке (2.2.2) примет вид

$$\partial_x (u + \hat{G}_{2r}u)|_{x=0} = \psi(y).$$

Характеристический многочлен уравнения (2.2.5) имеет вид

$$d(\lambda) = \lambda q_r(\lambda) + 1, \quad (2.2.6)$$

где функция $q_r(\lambda)$ строится по рекуррентным формулам

$$p_i = B_{2i-1}(1 + \lambda q_{i-1}) + p_{i-1}, \quad q_i = A_{2i}(1 + \lambda p_i) + q_{i-1},$$

$$i = 1, \dots, r, \quad p_0 = q_0 = 0.$$

Пусть многочлен $d(\lambda)$ (2.2.6) имеет корни $-\gamma_j$ кратности m_j . Отсюда ограниченное в полуцилиндре D решение уравнения (2.2.5) получим в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{kj}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(x-t, y) dt. \quad (2.2.7)$$

Формула (2.2.7) дает решение исходной задачи (2.2.1), (2.2.2) [32].

Для двухслойной пленки типа (B, A) обобщенное граничное условие (2.2.2) имеет вид

$$AB\partial_x^3 u + A\partial_x^2 u + \partial_x u|_{x=0} = \psi(y), \quad (2.2.8)$$

где $f(x, y)$ – решение классической задачи (2.2.4). Отсюда решение задачи (2.2.1), (2.2.8) получено в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(x-t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt$$

и

$$u(x, y) = \frac{1}{AB} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_3 t} t f(x-t, y) dt$$

соответственно при $T \neq 0$ и $T = 0$, где $\gamma_j = [A + (-1)^j \sqrt{T}](2AB)^{-1}$, $T = A(A - 4B)$, $\gamma_3 = (2B)^{-1}$.

При этом имеет место теорема, аналогичная теореме 2 (стр. 14).

В случае трехслойной пленки типа (A_1, B, A_2) обобщенное граничное условие (2.2.2) имеет вид

$$s\partial_x^4 u + A_2 B \partial_x^3 u + (A_1 + A_2) \partial_x^2 u + \partial_x u|_{x=0} = \psi(y), \quad (2.2.9)$$

где $s = A_1 B A_2$, при этом характеристический многочлен (2.2.6) определяется равенством

$$d(\lambda) = s\lambda^3 + A_2 B \lambda^2 + (A_1 + A_2)\lambda + 1 \quad (2.2.10)$$

Теорема 4. Если функция $f(x, y)$ является решением корректной задачи (2.2.4) и удовлетворяет вместе с производными, входящими в уравнение (2.2.4), условию

$$|f(x, y)| = O(e^{\gamma|x|}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad 0 < \gamma < \min \operatorname{Re} \gamma_j,$$

где $-\gamma_i$ – корни многочлена (2.2.10), то решение задачи (2.2.1), (2.2.9) существует, единственно и в случаях $d(\lambda) = s(\lambda + \gamma_1)(\lambda + \gamma_2)(\lambda + \gamma_3)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$; $d(\lambda) = s(\lambda + \gamma_1)^2(\lambda + \gamma_2)$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и $d(\lambda) = s(\lambda + \gamma_1)^3$ строится соответственно по формулам

$$u(x, y) = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(x-t, y) \left(\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_{21}\gamma_{31}} - \frac{e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_{21}\gamma_{32}} + \frac{e^{-\gamma_3 t}}{\gamma_{31}\gamma_{32}} \right) dt;$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\gamma_{21}^2 s} \int_0^\infty f(x-t, y) [e^{-\gamma_1 t} (\gamma_{21} t - 1) + e^{-\gamma_2 t}] dt$$

и

$$u(x, y) = \frac{1}{2s} \int_0^\infty f(x-t, y) e^{-\gamma_1 t} t^2 dt,$$

где $\gamma_{ji} = \gamma_j - \gamma_i$.

Решение задач с неоднородными условиями

$$\partial_x^2 w + Lw = H(x, y), \quad Mw|_S = h(x, y),$$

$$\partial_x w + G_{2r} w|_{x=0} = \psi_1(y)$$

имеет вид $w = u + v$, где $v(x, y)$ – решение классической задачи в D без пленки:

$$\partial_x^2 v + Lv = H(x, y), \quad Mv|_S = h(x, y), \quad \partial_x v|_{x=0} = 0,$$

а $u(x, y)$ – решение задачи (2.2.1), (2.2.2) с граничной функцией $\psi(y) = \psi_1(y) - G_{2r} v|_{x=0}$.

3 Решение краевых задач с двухслойной пленкой. Теорема существования и единственности [32], [35]

В цилиндре $D = (-\infty < x < \infty) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, состоящем из двух полуцилиндров $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$, для функций $u_i(x, y)$ в D_i рассмотрен класс задач

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \quad Mu_{1|S} = 0, \quad x < 0, \quad (3.1)$$

$$\partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y), \quad Mu_{2|S} = h(x, y), \quad x > 0, \quad (3.2)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_2 \partial_x u_2, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1. \quad (3.3)$$

В данном случае полуцилиндры D_i разделены двухслойной пленкой $x = 0$, состоящей из сильно проницаемой прослойки $x = -0$ с параметром A и слабо проницаемой прослойки $x = +0$ с параметром B .

Теорема 5. Если функция $f(x, y)$ является решением корректной задачи

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ H(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad Mf|_S = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ h(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

по переменной x функция $f(x, y) \in C^4(D)$ и при $x \rightarrow -\infty$ эта функция вместе с производными, входящими в задачу (3.4), имеет асимптотику

$$|f(x, y)| = O(e^{\gamma|x|}), \quad 0 < \gamma < \min \operatorname{Re} \gamma_j,$$

то решение задачи (3.1)-(3.3) существует, единственно и выражается через функцию $f(x, y)$ по формулам

$$u_1 = \frac{2k_2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(x-t, y) \left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right) dt, \quad (3.5)$$

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) \left[(k_1 - \gamma_1 A) e^{-\gamma_1 t} - (k_1 - \gamma_2 A) e^{-\gamma_2 t} \right] dt \quad (3.6)$$

при $T \neq 0$ и

$$u_1 = \frac{2}{AB} \int_0^{\infty} f(x-t, y) e^{-\gamma_3 t} dt, \quad (3.7)$$

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) - \frac{2}{ABk_2} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) e^{-\gamma_3 t} \left[(k_1 - \gamma_3 A)t + A \right] dt \quad (3.8)$$

при $T = 0$, где

$$\gamma_i = \frac{A + Bk_1k_2 + (-1)^i \sqrt{T}}{2ABk_2}, \quad T = (A - Bk_1k_2)^2 - 4ABk_2^2.$$

Показано, что правые части формул (3.4.5)-(3.4.8) являются операторами, которые действуют на функцию $f(x, y)$ по одной переменной x и отображают решения задач (3.4) без пленки на решения задач (3.1)-(3.3) с пленкой, при этом $u_i \in C^4(D)$ по переменной x . Обратный оператор получен в виде [32]

$$f(x, y) = \frac{1}{2k_2} [ABk_2 \partial_x^2 u_1(x, y) + (A + k_1k_2B) \partial_x u_1(x, y) + (k_1 + k_2)u_1(x, y)], \quad x < 0,$$

$$f(x, y) = u_2(x, y) - \frac{1}{2k_2} [ABk_2 \partial_{\xi}^2 u_1(\xi, y) - (A - k_1k_2B) \partial_{\xi} u_1(\xi, y) + (k_2 - k_1)u_1(\xi, y)], \quad x \geq 0,$$

где $\xi = -x$, при этом выполняется необходимое условие

$$\frac{\partial^k f(-0, y)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k f(+0, y)}{\partial x^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е. $f(x, y) \in C^4(D)$.

4 Решение краевых задач для уравнения Лапласа в полуплоскости с неограниченными граничными функциями. Метод квазиинтегралов Фурье [37]

Рассмотрена третья краевая задача в полуплоскости $D(x \in R, y < 0)$ с достаточно гладкой граничной функцией, которая в бесконечности имеет произвольный степенной рост, т.е. на границе полуплоскости имеет место слабо проницаемая пленка и в бесконечности граничная и искомая функция имеют особую точку.

Задача имеет вид

$$\Delta \varphi = 0, \quad y < 0, \quad \partial_y \varphi + h \varphi|_{y=0} = f(x), \quad (4.1)$$

где $h > 0$ – постоянная, Δ – оператор Лапласа по переменным x, y ; $f(x) = O(x^n)$ при $|x| \rightarrow \infty$; аналогичную особенность в ∞ имеет искомая функция $\varphi(x, y)$.

Предположим, что n -я производная от функции $f(x)$ разлагается в классический интеграл Фурье:

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} [f_1(\lambda) \sin \lambda x + f_2(\lambda) \cos \lambda x] d\lambda,$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ \cos \lambda x \end{pmatrix} dx. \quad (4.2)$$

Здесь граничная функция $f(x)$ не разлагается в интеграл Фурье, при этом учитывается, что операция дифференцирования понижает порядок полюсов в ∞ . Дифференцируя задачу (4.1) n раз по свободной переменной x , для функции $\Phi = \partial_n \varphi$ получаем аналогичную задачу с граничной функцией $f^{(n)}(x)$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad y < 0; \quad \partial_y \Phi + h\Phi|_{y=0} = f^{(n)}(x), \quad (4.3)$$

здесь нижний числовой индекс n при ∂_n означает производную n -го порядка по x . Применяя метод разделения переменных, найдем ограниченное в полуплоскости $y < 0$ решение задачи (4.3) в виде

$$\Phi(x, y) \equiv \partial_n \varphi = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} [F_1(\lambda) \sin \lambda x + F_2(\lambda) \cos \lambda x] d\lambda, \quad y < 0, \quad (4.4)$$

где

$$F_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda)}{\lambda + h},$$

$f_i(\lambda)$ имеют вид (4.2). Отсюда для решения $\varphi(x, y)$ задачи (4.1) получили задачу о восстановлении гармонической функции по одной ее n -й производной $\Phi(x, y) \equiv \partial_n \varphi$ вида (4.4). Определяя последовательно сопряженную гармоническую функцию и вычисляя соответствующий криволинейный интеграл, на k -м шаге получим

$$\begin{aligned} \Phi_k \equiv \partial_{n-k} \varphi = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} (F_1 P_k + F_2 Q_k) d\lambda + \\ + \sum_{m=1}^{k-1} [R_m \partial_{n-k+m} \varphi(0,0) + I_m \partial_{n-k+m-1,y} \varphi(0,0)] + \partial_{n-k} \varphi(0,0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$R_m = \frac{\operatorname{Re} z^m}{m!}, \quad I_m = \frac{\operatorname{Im} z^m}{m!}, \quad z = x + iy, \quad (4.6)$$

сопряженные гармонические по переменным x, y функции $P_k(x, y, \lambda)$ и $Q_k(x, y, \lambda)$ строятся по рекуррентным формулам

$$P_{k+1} = R_k - \frac{Q_k}{\lambda}, \quad Q_{k+1} = I_k + \frac{P_k}{\lambda},$$

$$P_1 = 1 - e^{\lambda y} \cos \lambda x, \quad Q_1 = e^{\lambda y} \sin \lambda x, \quad (4.7)$$

причем $P_k = Q_k = 0$ при $x = y = 0$. Отсюда с учетом $P_{k+1} = (R_k \lambda^2 - I_{k-1} \lambda - P_{k-1}) \lambda^{-2}$, $Q_{k+1} = (I_k \lambda^2 + R_{k-1} \lambda - Q_{k-1}) \lambda^{-2}$ следуют формулы

$$P_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} (R_{2j+1} \lambda^{2j+1} - I_{2j} \lambda^{2j}) - (-1)^k (R_1 \lambda - Q_1) \right],$$

$$Q_{2k} = \frac{1}{\lambda^{2k-1}} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j-1} (I_{2j+1} \lambda^{2j+1} + R_{2j} \lambda^{2j}) - (-1)^k (I_1 \lambda + P_1) \right],$$

$$P_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} (R_{2j} \lambda^{2j} - I_{2j-1} \lambda^{2j-1}) + (-1)^k P_1 \right],$$

$$Q_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^{2k}} \left[\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} (I_{2j} \lambda^{2j} + R_{2j-1} \lambda^{2j-1}) + (-1)^k Q_1 \right], \quad (4.8)$$

где при $k = 1$ в первых двух равенствах суммы $\Sigma = 0$.

Отсюда по формуле (4.5) при $k = n$ найдем решение исходной задачи (4.1) в виде

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty \frac{f_1 P_n + f_2 Q_n}{\lambda(\lambda + h)} d\lambda + \sum_{k=1}^{n-1} [R_k \partial_k \varphi(0,0) + I_k \partial_{k-1,y} \varphi(0,0)] + \varphi(0,0), \quad (4.9)$$

где f_i, P_n, Q_n, R_k, I_k имеют вид (4.2), (4.6)-(4.8).

Доказано [37], что подынтегральная функция (4.9) в особой точке $\lambda = 0$ имеет конечный предел, при этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_n}{\lambda} = -I_n, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{Q_n}{\lambda} = R_n.$$

Теорема 6. Если граничная функция $f(x) \in C^{n+1}(R)$, $f^{(n+1)}(x)$ – абсолютно интегрируема при $x \in R$ и $f^{(n)}(x)$ разлагается в интеграл Фурье, то решение третьей граничной задачи (4.1) строится по формуле (4.9) с точностью до n постоянных $\partial_k \varphi(0,0)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Таким образом, для единственности решения задачи (4.1) следует, кроме граничной функции $f(x)$, задать значения указанных производных от искомого решения по переменной x в одной точке. Решение задачи получено в виде квазиинтеграла Фурье (4.9) с классическими коэффициентами Фурье от n -ой производной граничной функции. Полученные результаты позволяют решать краевые задачи с особыми точками в бесконечности.

Аналогично решаются краевые задачи первого и второго рода в полуплоскости с граничными функциями, неограниченными в бесконечности. На основании полученных формул с помощью конформного отображения $\zeta = 1/z$, где $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, можно решать указанные задачи в полуплоскости $\eta < 0$ плоскости ζ для уравнения Лапласа с неограниченными граничными функциями в окрестности точки $\zeta = 0$.

5 Решение некоторых прикладных задач. Температурные волны в курумах [34]

Курумы – скопления обломков скальных горных пород, расположенных на коренных скальных породах. В работе рассмотрен курум в виде пласта $D_1(0 < z < h)$ толщины h с коэффициентом теплопроводности k_1 (ось z направлена вниз). Подстилающий пласт коренных пород $D_2(h < z < \infty)$ имеет коэффициент теплопроводности k_2 . На внешней границе курума $z = 0$ задано изменение температуры (потенциала) по синусоидальному закону от времени t , что моделирует суточные или сезонные колебания температуры. Пусть в каждом вертикальном сечении процесс теплообмена одинаков, т.е. рассмотрим одномерную задачу теплопроводности по пространственной переменной z . Следуя линейной модели, для тепловых потенциалов $u_i(z, t)$ в D_i задача без начальных условий ($-\infty < t < \infty$) имеет вид

$$\partial_i u_i = a_i^2 \partial_z^2 u_i, \quad i = 1, 2, \quad u(0, t) = A \sin wt, \quad (5.1)$$

$$z = h: \quad u_1 = u_2, \quad k_1 \partial_z u_1 = k_2 \partial_z u_2. \quad (5.2)$$

Решение задачи получено в виде температурных волн с частотой w :

$$u_1(z, t) = b_1 e^{-v_1 z} \sin(wt - v_1 z) + (A - b_1) e^{-v_1 z} \sin(wt + v_1 z) + \\ + b_2 e^{-v_1 z} \cos(wt - v_1 z) - b_2 e^{-v_1 z} \cos(wt + v_1 z),$$

$$u_2(z, t) = b_3 e^{-v_2(z-h)} \sin(wt - v_2 z) + b_4 e^{-v_2(z-h)} \cos(wt - v_2 z),$$

где $v_i = \sqrt{\frac{w}{2a_i^2}}$, четыре параметра b_i удовлетворяют однозначно разрешимой системе алгебраических уравнений, решение которой строится по правилу Крамера. Отсюда решение задачи (5.1), (5.2) строится в конечном виде в элементарных функциях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты являются продолжением и развитием научного направления, разрабатываемого в данном проекте и связанного с решением краевых задач математической физики в областях с пленочными структурами.

В целом в 2015 г. получены следующие результаты:

- разработан новый аналитический метод решения краевых задач в областях с пленочными границами, позволяющий сводить задачи с пленками к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и решению аналогичных классических задач без пленок,

- дано математическое обоснование полученных результатов: выведены явные формулы для решений краевых задач с пленками и доказаны соответствующие теоремы существования и единственности,

- решены новые прикладные задачи.

Решения рассмотренных задач с пленками выражены в виде быстро сходящихся квадратур через решения аналогичных классических краевых задач без пленок. Последнее позволяет для каждого известного решения классической задачи автоматически получать решения серии аналогичных задач в данной области с различными пленками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Пилатовский В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
- 2 Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 513 с.
- 3 Абдурахманов И.М., Алишаев М.Г. Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 173-177.
- 4 Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с.
- 5 Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242-247.
- 6 Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312 с.
- 7 Крутицкий П.А., Прозоров К.В. К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268-1283.
- 8 Krutitskii P.A. The modified jump problem for the Laplace equation and singularities at the tips // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 183. pp. 232-240.
- 9 Номировский Д.А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390-1399.
- 10 Симоненко И.Б. Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 301-309.
- 11 Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Драпкин Б.А. Функция Грина для пространственных стационарных задач теплопроводности многослойного тела // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 524-527.
- 12 Белоцерковский П.М. Неустановившиеся колебания бесконечной струны, несущей сосредоточенную массу и поддерживаемую упруговязкими подвесками // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 5. С. 791-812.
- 13 Головатый Ю.Д. О собственных колебаниях и собственных частотах упругого стержня с присоединенной массой // УМН. 1988. Т. 43. Вып. 4. С. 173-174.
- 14 Гомес Д., Назаров С.А., Перес М.Е. Формальная асимптотика собственных частот колебаний упругого трехмерного тела с концентрированными массами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2007. Т. 342. С. 31-76.

15 Культербаев Х.П., Исламова О.В. Математическая модель колебаний подвешенной струны с сосредоточенной массой // Изв. высш. учеб. завед. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2007. № 4. С. 41-46.

16 Мельник Т. А., Попов А. В. Асимптотический анализ краевых и спектральных задач в тонких перфорированных областях с быстро изменяющейся толщиной и различными предельными размерностями // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 8. С. 97–124.

17 Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Проблема устойчивости для замкнутой релятивистской струны с точечной массой // Вестник Тверского ГУ. Серия: Физика. 2005. № 9 (15). Вып. 2. С. 114-123.

18 Перес М. Е., Чечкин Г. А., Яблокова Е. И. О собственных колебаниях тела с «легкими» концентрированными массами на поверхности // УМН. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.

19 Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // УМН. 2008. Т. 63. Вып. 1(379). С. 111–154.

20 Чечкин Г.А. Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // УМН. 2004. Т. 59. Вып. 4. С. 205-206.

21 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550-1556.

(Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. pp. 1489-1495).

22 Холодовский С.Е. Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 7. С. 1209-1213.

(Kholodovskii S. E. A method of Fourier series for solution of problems in piecewise inhomogeneous domains with rectilinear crack (screen) // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. Vol. 48. No. 7. pp. 1140-1144).

23 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855-859.

(Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. pp. 873-877).

24 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204-1208.

(Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // *Differential Equations*. 2009. Vol. 45. No. 8. pp. 1229-1233).

25 Холодовский С.Е. О решении краевых задач на кусочно-однородной плоскости с параболической трещиной (завесой) // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. 2009. Т. 49. № 11. С. 1931-1936.

(Kholodovskii S. E. Solution of Boundary Value Problems for Laplace's Equation in a Piecewise Homogeneous Plane with a Parabolic Crack (Screen) // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009. Vol. 49. No. 11. pp. 1847–1852).

26 Холодовский С.Е., Гуримская И.А, Игнатьева Н.В. О решении краевых задач на неоднородной плоскости с трещиной и завесой, соединенными последовательно // *Дифференц. уравнения*. 2011. Т. 47. № 3. С. 396-404.

(Kholodovskii S. E., Gurimskaya I. A., Ignat'eva N.V. On the Solution of Boundary Value Problems on an Inhomogeneous Plane with a Crack and a Barrier Connected in Series // *Differential Equations*. 2011. Vol. 47. No. 3. pp. 393-401).

27 Холодовский С.Е., Шадрина Н.Н. О решении краевых задач с обобщенными условиями сопряжения типа трещины (завесы) // *Известия вузов. Математика*. 2011. № 6. С. 100-106.

(Kholodovskii S. E., Shadrina N.N. Solution of Boundary-Value Problems with Generalized Transmission Conditions of the Type of a Crack or a Screen // *Russian Mathematics*. 2011. Vol. 55. No. 6. pp. 85-90).

28 Холодовский С.Е., Нутчина-Пестрякова Н.В. О решении краевых задач в цилиндрах, разделенных трехслойной пленкой на два полуцилиндра // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. 2012. Т. 52. № 7. С. 1261-1266.

29 Холодовский С.Е. О решении краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости с трехслойным пленочным включением // *Дифференц. уравнения*. 2013. Т. 49. № 12. С. 1697-1701.

(Kholodovskii S. E. On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on the Plane with a Three-Layer Film Inclusion // *Differential Equations*. 2013. Vol. 49. No. 12. pp. 1655–1660).

30 Холодовский С.Е. О решении краевых задач в полупространстве, ограниченном многослойной пленкой // *Ученые записки ЗабГГПУ. Сер. Физика, математика, техника, технология*. 2011. № 3 (38). С. 160-164.

31 Холодовский А.С., Холодовский С.Е. О разложении функций в квазиинтегралы Фурье и их приложения к решению краевых задач // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1412-1416.

(Kholodovskii A. S. and Kholodovskii S. E. Fourier quasi-integral expansions of functions and their applications to the solution of boundary value problems // Differential Equations. 2004. Vol. 40. No. 10. pp. 1491-1495).

Список работ исполнителей НИР по данному гос. заданию за 2015 г.

32 Холодовский С.Е. Задачи математической физики в областях с пленочными включениями. Монография. Чита. Изд-во Забайкальского гос. университета. 2015. 232 с.

33 Холодовский С. Е. Краевые задачи в областях с наноструктурными границами (покрытиями). Теорема двойственности // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Серия «Физика, математика, техника, технология» 2015. № 3(62). С. 130-134. *(Из перечня ВАК).*

34 Железняк И.И., Холодовский С.Е. Природа и модель распространения температурных волн в курумах // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Серия «Физика, математика, техника, технология» 2015. № 3(62). С. 44-47. *(Из перечня ВАК).*

35 Холодовский С.Е. Решение краевых задач в цилиндрах с двухслойным пленочным включением // Тезисы докладов. Международная конференция. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. 22-27. 06. 2015. Улан-Удэ. С. 314-315.

36 Холодовский С.Е. Решение уравнения Пуассона в полуплоскости, ограниченной двухслойной пленкой // Тезисы докладов. XIX-XX Международная научно-практическая конференция. Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии. 11-12.09, 16-17.10. 2015. Новосибирск. С. 37-39.

37 Ефимова И.А. О решение краевых задач для уравнения Лапласа в полуплоскости с неограниченными граничными функциями. Метод квазиинтегралов Фурье // Ученые записки ЗабГУ. Серия «Физика, математика, техника, технология». 2015. № 3(62). С. 38-43. *(Из перечня ВАК).*

38 Холодовский С.Е. О многослойных пленках на границе полупространства // Математические заметки. Т. 99. Вып. 3. 2016. С. 421-427. *(Из перечня Web of Science, SCOPUS) (Статья принята в печать).*