

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Забайкальский государственный университет»
(ФГБОУ ВПО «ЗабГУ»)

УДК 517.956

№ госрегистрации 01201461151

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ



И.о. ректора ЗабГУ, д-р техн. наук

А.Н. Хатькова

2015 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Новый метод решения задач математической физики
в областях с сингулярными возмущениями.

(промежуточный)

Начальник научно-исследовательского
управления

И.Ю. Мальчикова

подпись, дата

30.01.2015

Руководитель темы

С.Е. Холодовский


подпись, дата

20.01.2015


Чита 2015 г.

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы
профессор
доктор физ.-мат. наук
доцент

 29.01.2015 С. Е. Холодовский (введение, разделы 1-5,
подпись, дата заключение, приложение)

Соисполнители:
кандидат физ.-мат.наук
доцент ЗаБИП

 29.01.2015 И. А. Ефимова (раздел 5.7)
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 34 с., 30 источников.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, СИЛЬНО- И СЛАБО ПРОНИЦАЕМЫЕ ПЛЕНКИ, МНОГОСЛОЙНЫЕ ПЛЕНОЧНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ, ПЛЕНОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ, ТОЧЕЧНЫЕ МАССЫ, УПРУГИЕ КОНТАКТЫ

Объектом исследования являются краевые задачи математической физики в областях с сингулярными возмущениями. Под сингулярными возмущениями понимаются многослойные пленочные включения, пленочные границы областей, точечные массы, упругие контакты и другие структуры бесконечно малой меры с бесконечно большой или бесконечно малой концентрацией заданного параметра.

Цель работы – разработка аналитического метода решения краевых задач с сингулярными возмущениями. Применение этого метода к решению новых задач из различных разделов математической физики с сингулярными возмущениями.

Результаты работы: 1) полученные за последние годы результаты систематизированы и опубликованы в виде монографии, 2) решены новые краевые задачи с сингулярными возмущениями: задача Пуассона в области с составными пленочными границами, задача о колебании струн с точечной массой, а также задача об оптимальном дебите скважины. С помощью полученных формул рассмотренные задачи сведены к классическим задачам, решения которых строятся по известным формулам.

Результаты работы могут быть использованы

- при исследовании динамических процессов в композитных материалах, содержащих наноразмерные пленочные включения и пленочные покрытия,
- в расчетах колебательных процессов с сосредоточенными нагрузками и с неидеальными упругими контактами составных элементов (мостов, балок, антенн, крыльев самолетов и т.д.),
- в задачах теплоизоляции зданий посредством пленочных теплоизоляторов,
- в задачах экранирования загрязненных зон.

Развитие исследования. Разработанным методом можно эффективно решать множество новых задач с сингулярными возмущениями. К ним относятся задачи математической физики с криволинейными многослойными пленками внутри и на границах областей, задачи о колебании объектов большей размерности с комбинациями сосредоточенных нагрузок и упругих контактов, задачи с функциональными коэффициентами уравнений при наличии пленочных включений и др.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	5
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	8
1 Задачи в неограниченных цилиндрах с пленочными включениями	8
2 Задачи в полуограниченных цилиндрах с пленочными границами и пленочными включениями	11
3 Задачи в ограниченных цилиндрах с пленочными границами и пленочными включениями	13
4 Задачи в неоднородных неограниченных цилиндрах с пленочными включениями	16
5 Двумерные задачи	18
5.1 Пленочные включения в виде параболы	18
5.2 Трехслойное пленочное включение в виде луча	20
5.3 Разрывное включение типа сильно- и слабо проницаемых пленок	21
5.4 Задачи в областях, ограниченных последовательно соединенными сильно- и слабо проницаемыми пленками	22
5.5 Задача о движении неограниченной струны с точечной массой	23
5.6 Задача о движении неограниченной составной струны с упругим контактом	24
5.7 Задача об оптимальном расположении дренажа под бетонной плотиной	25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	27
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	28
Список работ исполнителей НИР по данному гос. заданию за 2014 г.	31
Приложение А	32

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы определяется тем, что в современных условиях большой интерес имеют задачи тепломассопереноса в средах, содержащих пленочные включения, которые моделируют естественные и искусственные экраны, дренажи, проводники, электроды, мембраны, изоляторы, теплосберегающие покрытия и т.д. Так, в технике все более широкое применение находят композитные материалы, содержащие наноразмерные пленочные включения и пленочные покрытия (нанокомпозиты). Ленточные дренажи и завесы-экраны используются в задачах экологии при ограждении загрязненных зон, при перехвате нежелательных и стимулировании полезных потоков. В радиоэлектронике применяются диэлектрики на пленочной основе. Контакты разнородных сред, как правило, не бывают идеальными и также могут содержать пленки в виде микротрещин.

Пленочные включения, несмотря на свой незначительный объем, могут существенно влиять на динамические процессы, протекающие в указанных материалах.

Кроме указанных задач большой интерес имеет исследование колебаний протяженных объектов с сосредоточенными нагрузками и включениями (точечными массами, упругими прокладками и т.д.), например, колебания нагруженных балок, пролетов мостов, крыльев самолетов, антенн и т.д.

Исследование динамических процессов в материалах с пленочными включениями приводит к краевым задачам с обобщенными условиями сопряжения на пленках. В монографиях В.П. Пилатовского 1966 [1] и Н.И. Мухелишвили 1968 [2] решение указанных задач ищется в виде интеграла типа Коши по контуру пленочного включения, на котором выполняются условия «преломления» потока (условия сопряжения). При этом задачи сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений. Метод представления искомых решений в виде потенциалов с неизвестной плотностью по контуру пленок получил развитие в работах [3-9 и др.].

В указанных работах рассматриваются задачи сопряжения, соответствующие однослойным пленкам для уравнений с постоянными коэффициентами. Случай трехслойной пленки рассмотрен в работе [10], где доказана разрешимость одного класса краевых задач.

При решении задач о движении струн с точечными массами применяются методы рядов Фурье, преобразований Фурье, численное моделирование, асимптотические методы, методы теории усреднения [11-20]. При этом основная проблема заключается в нахождении спектра собственных частот.

Численные методы для решения краевых задач с пленками малоэффективны, т.к. требуют достаточно мелкой сетки аппроксимации в окрестности пленок, где имеет место резкое изменение параметров.

В данном проекте разработан аналитический метод решения краевых задач математической физики в областях, содержащих сингулярные возмущения внутри и на границах областей [21-29]. Классические граничные условия первого и второго рода соответствуют идеальному контакту областей с внешней средой [19]. В данном проекте выведены обобщенные граничные условия на границе в виде многослойных пленок, что соответствует неидеальному контакту. При этом показано, что в зависимости от количества слоев в многослойной пленке порядок производных в граничных условиях может быть произвольным. Также выведены обобщенные условия сопряжения на многослойных пленках, расположенных внутри областей.

Разработанный руководителем проекта метод, названный «Методом свертывания разложений Фурье» [21-24], позволяет выводить формулы, выражающие решения краевых задач в областях с сингулярными возмущениями через решения классических краевых задач без сингулярных возмущений с сохранением уравнения и граничных функций. При этом если известно решение некоторой классической задачи из рассматриваемого класса задач без пленок, то по выведенным формулам получаем решения серии аналогичных задач с различными пленками. Полученные формулы справедливы для линейных дифференциальных уравнений с функциональными коэффициентами произвольного типа: эллиптических, параболических и гиперболических.

Суть разработанного метода заключается в следующем. Относительно функции $u(x, y)$ рассматривается некоторый класс краевых задач, содержащих обобщенные условия сопряжения, например, на пленке $x = x_0$, где $x \in R$, $y \in Q \subseteq R^m$. Наряду с этими задачами для функции $f(x, y)$ рассматриваются аналогичные классические краевые задачи без пленки. Для вывода общих формул рассматриваются простейшие *модельные* случаи указанных задач на плоскости для оператора Лапласа, допускающие применение метода Фурье по переменной y (вдоль пленки). При этом исходный класс задач включает задачи, для которых метод Фурье в указанном смысле неприменим.

Затем посредством специальных формул в разложении Фурье решения усложненной задачи выделяется разложение Фурье решения классической задачи. В результате получены формулы, выражающие решения усложненных задач непосредственно через решения классических задач без разложений Фурье. Далее доказывается, что полученные формулы справедливы для исходного немодельного класса задач.

Полученные формулы имеют достаточно простой вид, т.к. содержат сложность лишь от наличия пленок, а сложность от классической составляющей задачи включена в ее известное решение $f(x, y)$. Это позволяет в частных случаях строить точные решения задач с сингулярными возмущениями в конечном виде в элементарных функциях.

Вопросы, связанные с классами обобщенных решений и теоремами существования, здесь не рассматриваются. Целью работы является вывод явных формул, выражающих решения задач с сингулярными возмущениями через решения классических задач. При этом если существует классическое (или обобщенное [30]) решение классической задачи, то полученные решения задач с сингулярными возмущениями также являются классическими (или обобщенными).

В работе доказаны теоремы, обосновывающие полученные формулы, и указаны классы заданных функций в этих формулах.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Задачи в неограниченных цилиндрах с пленочными включениями

В пространстве R^{m+1} рассмотрены неограниченные по переменной $x \in R$ цилиндры $D = (-\infty < x < \infty) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ при наличии пленочных включений $x = const$. Выведены обобщенные условия сопряжения на многослойной пленке $x = 0$, состоящей из произвольного числа сильно- и слабо проницаемых прослоек и разделяющей цилиндр D на два полуцилиндра $D_1(x < 0)$ и $D_2(x > 0)$. Сильно- и слабо проницаемые прослойки моделируются бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой и соответственно бесконечно малой проницаемостью. Здесь используется язык задач тепломассопереноса.

Для функций $u_i(x, y)$ в D_i рассматривается класс краевых задач с неоднородными условиями в одном полуцилиндре (что не умаляет общности):

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \quad M_\theta u_1|_{(x,y) \in S} = 0, \quad x < 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y), \quad M_\theta u_2|_S = h_\theta(x, y), \quad x > 0, \quad (1.2)$$

$$x = 0: \quad u_2 - u_1 = F_{2r}u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = G_{2r}u_1, \quad (1.3)$$

где $\partial_x^n = \partial^n / \partial x^n$, постоянные $k_j > 0$ характеризуют проницаемость зоны D_j по переменной x , $\theta = 1, 2, \dots, \sigma$; $S = (x \in R) \times (y \in \partial Q)$ – боковая поверхность цилиндра D , операторы M_θ и L являются линейными дифференциальными операторами по переменным y_i , $y = (y_1, \dots, y_m) \in Q$, операторы F_{2r} и G_{2r} строятся по рекуррентным формулам

$$F_{2i-1}u = F_{2i-2}u, \quad G_{2i-1}u = A_{2i-1} \partial_x^2 (u + F_{2i-2}u) + G_{2i-2}u,$$

$$F_{2i}u = B_{2i}(k_1 \partial_x u + G_{2i-1}u) + F_{2i-1}u, \quad G_{2i}u = G_{2i-1}u,$$

$F_0u = G_0u = 0$, $i = 1, \dots, r$. Здесь пленка $x = 0$ состоит из $2r$ чередующихся бесконечно тонких сильно- и слабо проницаемых прослоек с параметрами соответственно $A_1, B_2, \dots, A_{2r-1}, B_{2r}$, где $A_i = \lim_{k \rightarrow \infty, l \rightarrow 0} kl$, $B_j = \lim_{k \rightarrow 0, l \rightarrow 0} l/k$, k и l – проницаемость и раскрытие соответствующей прослойки. При этом операторы L , M_θ и заданные функции $H(x, y)$, $h_\theta(x, y)$ считаются такими, для которых аналогичная классическая задача в цилиндре D без пленки вида

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad M_\theta f|_{(x,y) \in S} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h_\theta(x, y), & x > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

имеет единственное классическое или обобщенное решение.

С помощью разработанного метода решение задачи (1.1)-(1.3) выражено через решение классической задачи (1.4) в виде

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} a_{kj} \int_0^\infty e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(x-t, y) dt, \quad x < 0, \quad (1.5)$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) -$$

$$-(-1)^s \left[f(-x, y) - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} b_{kj} \int_0^\infty e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(-x-t, y) dt \right], \quad x > 0, \quad (1.6)$$

где a_{kj} и b_{kj} – постоянные, $-\gamma_j$ – корни кратности m_j многочлена

$d(\lambda) = \lambda k_2 p_r + q_r + k_1 + k_2$, $q_i(\lambda)$ и $p_i(\lambda)$ строятся по рекуррентным формулам:

$$q_i = \lambda A_{2i-1}(1 + \lambda p_{i-1}) + q_{i-1}, \quad p_i = B_{2i}(k_1 + q_i) + p_{i-1}, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$p_0 = q_0 = 0.$$

Теорема 1.1. Если функция $f(x, y)$ является решением задачи (1.4), удовлетворяющим вместе с производными, входящими в эту задачу, условию

$$|f(x, y)| = O(e^{\gamma|x|}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad 0 < \gamma < \min \gamma_j,$$

то функции $u_i(x, y)$ (1.5), (1.6) являются решением задачи (1.1)-(1.3).

В Приложении А приведено доказательство теоремы 1.1 в случае однослойной сильно проницаемой пленки.

В качестве примеров построены решения задач для однослойных, двухслойных и трехслойных пленок. Так, в случае двухслойной пленки (AB) решение задачи имеет вид

$$u_1 = c \int_0^{\infty} f(x-t, y) (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) dt,$$

$$u_2 = f(x, y) + f(-x, y) - \int_0^{\infty} f(-x-t, y) (b_1 e^{-\gamma_1 t} - b_2 e^{-\gamma_2 t}) dt.$$

Аналогично решены задачи в цилиндрах D с двумя взаимно параллельными $x = 0$, $x = l$ и пересекающимися пленками различных типов.

2 Задачи в полуограниченных цилиндрах с пленочными границами и пленочными включениями

Рассмотрены краевые задачи в полуцилиндре $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ с пленочными включениями и пленочными границами. Решены краевые задачи в полуцилиндре D с основанием $x = 0$ в виде многослойной пленки, состоящей из $2r$ чередующихся сильно- и слабо проницаемых прослоек с параметрами соответственно $A_1, B_2, \dots, A_{2r-1}, B_{2r}$. Здесь рассматриваются два типа задач при заданном значении $\varphi(y)$ искомого решения и заданной нормальной скорости $\psi(y)$ на внешней стороне пленки $x = +0$. Первый тип задач для функции $u(x, y)$ в D имеет вид (1.1),

$$u + F_{2r} u|_{x=0} = \varphi(y). \quad (2.1)$$

Решение задачи получено в виде

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{p_j} \sum_{k=1}^{m_{kj}} b_{kj} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_j t} t^{k-1} f(x-t, y) dt, \quad (2.2)$$

где $f(x, y)$ – ограниченное в D решение классической задачи вида (1.4), $f|_{x=0} = \varphi(y)$ при $H = h = 0$. В случае $H(x, y) \neq 0$ и $h(x, y) \neq 0$ решение задачи (1.1), (2.1) строится в виде суммы полученного решения и решения соответствующей классической задачи.

Задачи второго типа имеют вид (1.1),

$$\partial_x u + G_{2r} u|_{x=0} = \psi(y). \quad (2.3)$$

Решение задачи (1.1), (2.3) получено в виде (2.2), где $f(x, y)$ – решение классической задачи в полуцилиндре D без пленки вида (1.4), $\partial_x f|_{x=0} = \psi(y)$.

В качестве примеров решены задач 1-го и 2-го типов в полуцилиндре D , ограниченном двухслойной пленкой $x = 0$.

Решены задачи (1.1) в полуцилиндре $D = (-\infty < x < l) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, $l > 0$ с однослойной и двухслойной пленкой $x = 0$, лежащей внутри полуцилиндра D и параллельной его основанию, при условии Дирихле на этом основании $x = l$. Так, в случае сильно проницаемой пленки $x = 0$ решение задачи (1.1), (1.3), $u_{2|x=l} = \varphi(y)$ получено в виде

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^n \partial_x^n f(x_1, y) dt, \quad x < 0,$$

$$u_2 = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^{n-1} \partial_x^n [f(x_1, y) - f(x_2, y)] dt, \quad 0 < x < l,$$

где $x_1 = x - 2nl - t$, $x_2 = -x - 2nl + 2l - t$, $\gamma = 2/A$, $f(x, y)$ – решение классической задачи в полуцилиндре D без пленки вида (1.4), $f_{|x=l} = \varphi(y)$.

Посредством композиции соответствующих операторов решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y < l$ ($l > 0$) с пересекающимися пленочными включениями.

3 Задачи в ограниченных цилиндрах с пленочными границами и пленочными включениями

Аналогично решаются задачи в ограниченных по переменной X цилиндрах с пленочными границами и пленочными включениями. Решены задачи в цилиндрах, ограниченных по основаниям пленками различных типов. Так решение задачи в цилиндре $D = (0 < x < l) \times (y \in Q \subseteq R^m)$, ограниченном по основаниям $x = 0, x = l$ слабопроницаемыми пленками с одинаковым параметром B :

$$\partial_x^2 u + Lu = 0, \quad M_\theta u|_S = 0, \quad (3.1)$$

$$B\partial_x u - u|_{x=0} = 0, \quad B\partial_x u + u|_{x=l} = \varphi(y), \quad (3.2)$$

получено в виде

$$u = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^{2n} \left\{ \partial_t^{2n} [e^{\gamma t} f(x_1, y)] - \frac{t}{2n+1} \partial_t^{2n+1} [e^{\gamma t} f(x_2, y)] \right\} dt, \quad (3.3)$$

где $x_1 = x - l - 2nl - t$, $x_2 = -x - l - 2nl - t$, $x_i < 0$, $\gamma = 1/B$, $f(x, y)$ – решение задачи в полуограниченном цилиндре $D_0 = (-\infty < x < 0) \times (y \in Q)$ с условием Дирихле на основании $x = 0$ при сохранении граничной функции:

$$\partial_x^2 f + Lf = 0, \quad M_\theta f|_S = 0, \quad f|_{x=0} = \varphi(y). \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. Если функция $f(x, y)$ является решением задачи (3.4) и при $x \rightarrow -\infty$, $n = 0, 1, \dots$ выполняется условие $|\partial_x^n [e^{-\gamma x} f(x, y)]| < c \alpha^n e^{\alpha|x|}$, то решение

задачи (3.1), (3.2) строится по формуле (3.3), где $0 < \alpha < \alpha_0$, $\alpha_0(1 + \nu e^{l\alpha_0}) = 2\gamma$, $c = \text{const}$, $\nu = e^{-l\gamma}$.

Решены задачи с сильно- и слабо проницаемой пленкой внутри цилиндра. Так в случае сильно проницаемой пленки $x = 0$, разделяющей цилиндр $D = (-l < x < l) \times (y \in Q \subseteq R^m)$ на две части $D_1(-l < x < 0)$ и $D_2(0 < x < l)$, рассматривается класс задач для функций $u_i(x, y)$ в D_i вида

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \quad M_\theta u_{1|S} = 0, \quad u_{1|x=-l} = 0,$$

$$\partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y), \quad M_\theta u_{2|S} = h_\theta(x, y), \quad u_{2|x=l} = \varphi(y),$$

$$x = 0: \quad u_2 = u_1, \quad \partial_x u_2 - \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1.$$

Решение задачи получено в виде

$$u_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ f(x_1, y) - f(x_2, y) + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^n \partial_t^{n+1} \left(e^{\gamma t} [f(x_1 - t, y) - f(x_2 - t, y)] \right) dt \right\},$$

$$u_2 = f(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ f(x_3, y) - f(x_4, y) - \right. \\ \left. - \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} t^n \partial_t^{n+1} \left(e^{\gamma t} [f(x_3 - t, y) - f(x_4 - t, y)] \right) dt \right\},$$

где $x_1 = x - 2nl$, $x_2 = -x - 2nl - 2l$, $x_3 = x - 2nl - 2l$, $x_4 = -x - 2nl$, $x_i < 0$,
 $\gamma = 2/A$, $f(x, y)$ – решение классической задачи в полуцилиндре
 $D_0 = (-\infty < x < l) \times (y \in Q)$ вида

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} H(x, y), & 0 < x < l, \\ 0, & -\infty < x \leq 0, \end{cases} \quad f|_{x=l} = \varphi(y),$$

$$M_\theta f|_S = \begin{cases} h_\theta(x, y), & 0 < x < l, \\ 0, & -\infty < x \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрены задачи в неограниченных по x цилиндрах $D = D_1(x < 0) \cup \cup D_2(x > 0)$, $y \in Q$ при наличии сильно- или слабо проницаемой пленки $x = 0$ для уравнений с функциональными коэффициентами в D_i вида

$$\partial_x [K_i(x) \partial_x \varphi_i] + K_i(x) L[\varphi_i] = H_0(x, y), \quad M[\varphi_i]_{|(x,y) \in S} = h_0(x, y), \quad (4.1)$$

$$x = 0: \quad \varphi_2 - \varphi_1 = BK_1 \partial_x \varphi_1, \quad K_2 \partial_x \varphi_2 - K_1 \partial_x \varphi_1 = \frac{A}{K_1} \partial_x (K_1 \partial_x \varphi_1), \quad (4.2)$$

где $H_0 = h_0 = 0$ при $x \leq 0$; и либо $A = 0$, либо $B = 0$, функция $K_i(x) > 0$ характеризует проницаемость зоны D_i по переменной x . Задачи (4.1), (4.2) решены для функций $K_i(x) = p_i [1 + (-1)^i q_i x]^2$, где $p_i > 0$, $q_i \geq 0$ (нули функций $K_i(x)$ лежат вне D_i), т.е. проницаемость зон D_i возрастает при удалении от пленки $x = 0$. Полагая $\varphi_i = u_i [1 + (-1)^i q_i x]^{-1}$, для функций $u_i(x, y)$ получены задачи типа (1.1)-(1.3), которые решаются разработанным методом. Так, в случае сильно проницаемой пленки $x = 0$ при $A \neq P$ функции $u_i(x, y)$ получены в виде

$$u_1 = \frac{2p_2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(x-t, y) (\gamma_2 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}) dt, \quad x < 0,$$

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) +$$

$$+ \frac{2p_2}{\sqrt{T}} \int_0^{\infty} f(-x-t, y) (\gamma_2 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}) dt, \quad x > 0,$$

где $P = (p_1 + p_2)^2 [4(p_1q_1 + p_2q_2)]^{-1}$, $\gamma_j = [p_1 + p_2 + (-1)^j \sqrt{T}] (2A)^{-1}$,
 $T = (p_1 + p_2)^2 - 4A(p_1q_1 + p_2q_2)$, $f(x, y)$ – решение задачи (1.4) при
 $H = H_0(x, y) [p_2(q_2x + 1)]^{-1}$, $h = (q_2x + 1)h_0(x, y)$. В частности для уравнения
 $\text{div}[K_i(x)\nabla\varphi] = 0$ полученные формулы выражают решения краевых задач для указан-
ных функций $K_i(x)$ при наличии пленки $x = 0$ через гармонические функции $f(x, y)$ с
сохранением их особых точек.

Доказана теорема двойственности, позволяющая по известным решениям задач (4.1),
(4.2) для функций $K_i(x)$ с сильно (слабо) проницаемой пленки $x = 0$ строить решения
аналогичных задач для функций $1/K_i(x)$ со слабо (сильно) проницаемой пленкой $x = 0$.
Отсюда получены решения задач (4.1), (4.2) для функций $K_i(x) = p_i [1 + (-1)^i q_i x]^{-2}$,
при этом проницаемость зон D_i убывает при удалении от пленки $x = 0$.

Также решены задачи (4.1), (4.2) для функций $K_i(x) = p_i \text{th}^2 \alpha_i (x - x_i)$, где
 $p_i, \alpha_i, x_1 > 0$, $x_2 < 0$ ($K_i(x) > 0$ в D_i), т.е. проницаемость зон D_i возрастает при
удалении от пленки $x = 0$ до конечных значений. Полагая
 $\varphi_i = \alpha_i u_i - \text{cth}[\alpha_i (x - x_i)] \partial_x u_i$, для функций $u_i(x, y)$ получены задачи типа (1.1)-
(1.3), которые решаются разработанным методом.

Используя теорему двойственности, решены задачи (4.1), (4.2) для функций
 $K_i(x) = p_i \text{cth}^2 \alpha_i (x - x_i)$, при этом проницаемость зон D_i убывает при удалении от
пленки $x = 0$ до конечных положительных значений.

Решены задачи (4.1), (4.2) для различных комбинаций функций $K_i(x)$ в D_1 и D_2 ,
рассмотренных выше, при этом функция проницаемости во всем цилиндре D по перемен-
ной x может быть монотонной, а также может иметь максимум или минимум.

5 Двумерные задачи

5.1 Пленочные включения в виде параболы

Решены задачи для уравнения Пуассона на плоскости x, y с сильно- или слабо проницаемой пленкой в виде параболы. Так в случае сильно проницаемой пленки $x = ay^2 - l^2$, разделяющей плоскость на две зоны $D_1(x > ay^2 - l^2)$ и $D_2(x < ay^2 - l^2)$, $a = (4l^2)^{-1}$ (D_1 – внутренняя, а D_2 – внешняя зоны) задача в параболических координатах ξ, η ($x = \xi^2 - \eta^2$, $y = 2\xi\eta$, $-\infty < \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$) имеет вид

$$\partial_{\xi}^2 u_1 + \partial_{\eta}^2 u_1 = 0, \quad 0 < \eta < l, \quad (5.1.1)$$

$$\partial_{\xi}^2 u_2 + \partial_{\eta}^2 u_2 = H(\xi, \eta), \quad l < \eta < \infty, \quad (5.1.2)$$

$$u_1(\xi, 0) = u_1(-\xi, 0), \quad \partial_{\eta} u_1(\xi, 0) = -\partial_{\eta} u_1(-\xi, 0), \quad (5.1.3)$$

$$\eta = l: \quad u_2 = u_1, \quad \partial_{\eta} u_2 - \partial_{\eta} u_1 = A \partial_{\eta}^2 u_1. \quad (5.1.4)$$

Условия (5.1.3) выражают непрерывность искомого решения и нормальной производной на разрезе $S_0(x > 0, y = 0)$ основной плоскости. Применяя разработанный метод, решение задачи (5.1.1)-(5.1.4) получено в виде

$$u_1 = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^n \partial_t^n [f((-1)^n \xi, \eta_1) + f((-1)^{n+1} \xi, \eta_2)] dt, \quad 0 < \eta < l, \quad (5.1.5)$$

$$u_2 = f(\xi, \eta) - f(-\xi, -\eta + 2l) + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} t^n \partial_t^n [f((-1)^n \xi, \eta_3) + f((-1)^{n+1} \xi, \eta_2)] dt, \quad \eta > l, \quad (5.1.6)$$

где $\eta_1 = \eta - 2nl - t$, $\eta_2 = -\eta - 2nl - t$, $\eta_3 = -\eta - 2nl + 2l - t$, $\gamma = 2/A > 0$, $f(\xi, \eta)$ – решение классической задачи на плоскости ξ, η без пленки

$$\partial_{\xi}^2 f + \partial_{\eta}^2 f = \begin{cases} H(\xi, \eta), & \eta > l, \\ 0, & \eta < l. \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Теорема 5.1. Если функция $f(\xi, \eta)$ является решением задачи (5.1.7) и для любого $n = 0, 1, \dots$ выполняется условие $|\partial_{\eta}^n f(\xi, \eta)| < c \alpha^n e^{\alpha|\eta|}$, $\eta \rightarrow -\infty$, где $0 < \alpha < \alpha_0$, $\alpha_0(1 + e^{2\alpha_0 l}) = \gamma$, $c = \text{const}$, то решение задачи (5.1.1)-(5.1.4) строится по формулам (5.1.5), (5.1.6).

Показано, что функции $u_i(\xi, \eta)$ (5.1.5), (5.1.6) являются решением краевых задач в области $G(-b < \xi < b, \eta > 0)$, которой на плоскости (x, y) соответствует область, ограниченная параболой $x = b^2 - y^2/(4b^2)$ и содержащая пленку в виде отрезка параболы $x = y^2/(4l^2) - l^2$, $-2bl < y < 2bl$. В указанных формулах $f(\xi, \eta)$ – решение аналогичной краевой задачи без пленки.

5.2 Трехслойное пленочное включение в виде луча

Рассмотрена плоскость x, y , содержащая трехслойную пленку в виде луча $s(x > 0, y = 0)$, когда пленка состоит из слабопроницаемой прослойки $y = 0$ с примыкающими к ней сильно проницаемыми прослойками $y = +0$ и $y = -0$ ($x > 0$).

В параболических координатах ξ, η рассматривается задача для уравнения Пуассона:

$$\partial_{\xi}^2 u + \partial_{\eta}^2 u = H(\xi, \eta), \quad \eta > 0. \quad (5.2.1)$$

$$u(\xi, 0) - u(-\xi, 0) = 2B[\partial_{\eta} u(\xi, 0) - A\partial_{\eta}^2 u(\xi, 0)], \quad (5.2.2)$$

$$\partial_{\eta} u(\xi, 0) + \partial_{\eta} u(-\xi, 0) = A[\partial_{\eta}^2 u(\xi, 0) + \partial_{\eta}^2 u(-\xi, 0)]. \quad (5.2.3)$$

При этом трехслойная пленка в виде луча моделируется вырожденными парабололами.

Решение задачи выражено через решение классической задачи на всей плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ вида (5.1.7) по формуле

$$u = f(\xi, \eta) - f(\xi, -\eta) + 2\gamma \int_0^{\infty} \left[\frac{AB}{\sqrt{T}} (\gamma_2 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}) F_1(\xi, -\eta - t) + e^{-\gamma t} F_2(\xi, -\eta - t) \right] dt, \quad (5.2.4)$$

где $B \neq 4A$, $F_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[f(\xi, \eta) + (-1)^j f(-\xi, \eta)]$, $\gamma = 1/A > 0$.

$$\gamma_j = [B + (-1)^j \sqrt{T}](2AB)^{-1}, \quad T = B(B - 4A).$$

Теорема 5.2. Если функция $f(\xi, \eta)$ является решением задачи (5.1.7) и при $\eta \rightarrow -\infty$ удовлетворяет условию $|f(\xi, \eta)| < ce^{\delta|\eta|}$, где $0 < \delta < \min(\operatorname{Re} \gamma_j, \gamma)$ при $B \neq 4A$, то решение задачи (5.2.1)-(5.2.3) имеет вид (5.2.4).

5.3 Разрывное включение типа сильно- и слабо проницаемых пленок

Рассмотрим плоскость $z = x + iy$, содержащую сильно- и слабо проницаемые пленки в виде лучей соответственно $s_1(x < -a, y = 0)$ и $s_2(x > a, y = 0)$. В эллиптических координатах ξ, η ($x = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, $0 < \eta < \pi$) рассмотрена задача

$$\partial_{\xi}^2 u + \partial_{\eta}^2 u = H(\xi, \eta), \quad 0 < \eta < \pi, \quad (5.3.1)$$

$$u(\xi, \pi) - u(-\xi, \pi) = 2B \partial_{\eta} u(-\xi, \pi), \quad \partial_{\eta} u(\xi, \pi) = -\partial_{\eta} u(-\xi, \pi), \quad (5.3.2)$$

$$u(\xi, 0) = u(-\xi, 0), \quad \partial_{\eta} u(\xi, 0) + \partial_{\eta} u(-\xi, 0) = 2A \partial_{\eta}^2 u(\xi, 0). \quad (5.3.3)$$

Теорема 5.3. Если функция $f(\xi, \eta)$ на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ является решением задачи

$$\partial_{\xi}^2 f + \partial_{\eta}^2 f = \begin{cases} H(\xi, \eta), & \eta \in (0, \pi), \\ 0, & \eta \notin (0, \pi) \end{cases}$$

и при $\eta \rightarrow \pm\infty$ для любого $n = 0, 1, \dots$ выполняется условие $|\partial_{\eta}^n [e^{\gamma_k \eta} f(\xi, \eta)]| < c \alpha^n e^{\alpha |\eta|}$, где $0 < \alpha < \alpha_k$, $\alpha_k (1 + \nu_k e^{2\alpha_k \pi}) = 2\gamma_k$, $\nu_k = e^{-2\pi\gamma_k}$, то решение задачи (5.3.1)-(5.3.3) строится по формуле

$$u = f(\xi, \eta) - F_1(\xi, -\eta) + F_2(\xi, 2\pi - \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} [e^{-2\gamma_1 t} \partial_t^n \Phi_1 + e^{-2\gamma_2 t} (\partial_t^n \Phi_2 + \partial_t^{n-1} \Phi_0)] dt,$$

$$\text{где } F_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [f(\xi, \eta) + (-1)^k f(-\xi, \eta)],$$

$$\Phi_1 = e^{\gamma_1 t} [F_1(\xi, p_n) - F_1(\xi, -p_n) + F_1(\xi, q_n) - F_1(\xi, -q_n)],$$

$$\Phi_2 = e^{\gamma_2 t} [F_2(\xi, -q_{n+1}) + F_2(\xi, p_n) + F_2(\xi, q_n) + F_2(\xi, -p_{n-1})],$$

$$\Phi_0 = 2\gamma_2 e^{\gamma_2 t} [f(0, \pi + \eta_0 + t) + f(0, -\eta_0 - t)],$$

$$p_n = \eta + 2\pi n + t, \quad q_n = \eta - 2\pi n - t, \quad \eta_0 = \pi(2n + 1), \quad 0 < \eta < \pi, \quad \gamma_1 = 1/B, \\ \gamma_2 = 1/A.$$

5.4 Задачи в областях, ограниченных последовательно соединенными сильно- и слабо проницаемыми пленками

Для функции $u(x, y)$ в квадранте $D(x > 0, y > 0)$ рассмотрена задача со смешанными граничными условиями вида

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in D,$$

$$B\partial_x u - u|_{x=0} = \varphi(y), \quad A\partial_y^2 u - \partial_y u|_{y=0} = \psi(x). \quad (5.4.1)$$

Граничные условия (5.4.1) соответствуют условиям на слабопроницаемой пленке $x = 0$ с параметром B и на сильно проницаемой пленке $y = 0$ с параметром A . Решение задачи получено в виде

$$u(x, y) = -\frac{1}{AB} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\gamma_1 t - \gamma_2 \tau} f(x+t, y+\tau) dt d\tau,$$

где $f(x, y)$ – решение смешанной задачи в квадранте D с классическими граничными условиями первого и второго рода:

$$\Delta f = 0, \quad f|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad \partial_y f|_{y=0} = \psi_0(x),$$

$$f(x, y) = O(1), \quad \varphi_0(y) = A\varphi'(y) - \varphi(y), \quad \psi_0(x) = B\psi'(x) - \psi(x).$$

5.5 Задача о движении неограниченной струны с точечной массой

Рассмотрена задача о движении неограниченной струны (стержня) $-\infty < x < \infty$ с массой m , сосредоточенной в точке $x = 0$, вида

$$\partial_x^2 u_1 - \partial_t^2 u_1 = 0, \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_1|_{t=0} = 0, \quad x < 0, \quad (5.5.1)$$

$$\partial_x^2 u_2 - \partial_t^2 u_2 = 0, \quad u_2|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u_2|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (5.5.2)$$

$$x = 0: \quad u_2 = u_1, \quad \partial_x u_2 - \partial_x u_1 = m\partial_x^2 u_1, \quad (5.5.3)$$

где $0 \leq t < \infty$, t – время. Решение задачи (5.5.1)-(5.5.3) получено в виде

$$u_1(x, t) = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x - z, t) dz, \quad x < 0, \quad (5.5.4)$$

$$u_2(x, t) = f(x, t) - f(-x, t) + \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(-x - z, t) dz, \quad x > 0, \quad (5.5.5)$$

где $\gamma = 2/m$, $f(x, t)$ – решение классической задачи Коши вида

$$\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.5.6)$$

$$f|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \varphi(x), & x > 0, \end{cases} \quad \partial_t f|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \psi(x), & x > 0, \end{cases} \quad (5.5.7)$$

при этом функция $f(x, t)$ строится по известной формуле Даламбера.

В предельных случаях при $m \rightarrow 0$ и $m \rightarrow \infty$ из полученных формул следуют классические случаи движения струны без массы и движения полуограниченной струны $0 < x < \infty$ с закрепленным концом $x = 0$, что согласуется с физическими представлениями. Отсюда формулы (5.5.4), (5.5.5) описывают движение струны в промежуточных случаях к указанным предельным случаям.

Рассмотрен конкретный случай задачи, решение которой получено в конечном виде в элементарных функциях. Построены графики струны с точечной массой в различные моменты времени с определенным шагом.

5.6 Задача о движении неограниченной составной струны с упругим контактом

Рассмотрена задача о движении неограниченной струны, состоящей из двух кусков, концы которых в точке $x = 0$ соединены упругой прокладкой типа пружинки:

$$\partial_x^2 u_1 - \partial_t^2 u_1 = 0, \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_1|_{t=0} = 0, \quad x < 0, \quad (5.6.1)$$

$$\partial_x^2 u_2 - \partial_t^2 u_2 = 0, \quad u_2|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u_2|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (5.6.2)$$

$$x = 0: \quad \gamma(u_2 - u_1) = \partial_x u_1, \quad \partial_x u_2 = \partial_x u_1, \quad (5.6.3)$$

где $0 \leq t < \infty$, $\gamma = B/k$, B – жесткость пружинки, k – модуль силы натяжения струны.

Решение задачи (5.6.1)-(5.6.3) получено в виде

$$u_1(x, t) = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(x - z, t) dz, \quad x < 0, \quad (5.6.4)$$

$$u_2(x, t) = f(x, t) + f(-x, t) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma z} f(-x - z, t) dz, \quad x > 0, \quad (5.6.5)$$

где $f(x, t)$ – решение классической задачи Коши (5.5.6), (5.5.7).

В предельных случаях при $B \rightarrow 0$ и $B \rightarrow \infty$ из формул (5.6.4), (5.6.5) следуют классические случаи движения полуограниченной струны $0 < x < \infty$ со свободным концом и движения неограниченной непрерывной струны, что согласуется с физическими представлениями.

Приведен пример точного решения задачи в конечном виде в элементарных функциях, и построены графики струны с определенным шагом по времени.

5.7 Задача об оптимальном расположении дренажа под бетонной плотиной

Рассмотрена задача о фильтрации жидкости под непроницаемым основанием плотины в вертикальной плоскости среднего сечения плотины. Основание плотины имеет форму вытянутого эллипса L , на котором расположен сток заданной мощности, моделирующий разгрузочный дренаж. Под действием различного уровня воды в нижнем и в верхнем бьефах происходит нежелательная фильтрация под плотиной, которая при большой скорости в нижнем бьефе может привести к размыву фундамента плотины. Найдены оптимальные координаты стока, при которых скорость фильтрации в точке выхода воды в нижний бьеф равна нулю. Для потенциала $u(x, y)$ задача имеет вид

$$\Delta u = 0, \quad u|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x > a, \\ -p, & x < -a, \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_L = 0, \quad u|_{y=x=a, y=0} = 0, \quad (5.7.1)$$

причем функция $u(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0) \in L$ имеет логарифмическую особую точку типа стока заданной мощности Q : $-\frac{Q}{4\pi} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$, уравнение эллипса

L имеет вид

$$L = \left(x, y : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y < 0 \right), \quad a = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right),$$

$r_0 > 1$ – заданная постоянная. Координаты оптимального расположения стока в точке A получены из последнего условия (5.7.1) в виде

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \alpha_0, \quad y_0 = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = -2 \operatorname{arctg} \frac{Q}{2p}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит аналитический метод, позволяющий решать новые краевые задачи в областях с сингулярными возмущениями. Разработанным методом решены краевые задачи в цилиндрах и полуцилиндрах:

- а) с многослойными пленочными включениями;
- б) с границами областей в виде многослойных пленок;
- в) с двумя параллельными сильно- и слабо проницаемыми пленками;
- г) с пересекающимися пленочными включениями различных типов;
- д) с пленочными включениями для уравнений с функциональными кусочно-непрерывными коэффициентами определенных классов;

задачи на плоскости:

- а) с криволинейными пленочными включениями в виде параболы;
- б) с трехслойным пленочным включением в виде луча;
- в) с разрывным пленочным включением в виде лучей;
- г) с последовательно соединенными сильно- и слабо проницаемыми пленками;

а также задачи о движении неограниченной струны с точечной массой и упругим контактом.

Решения всех рассмотренных задач выражены через решения аналогичных классических краевых задач без сингулярных возмущений. При этом для каждого известного решения классической задачи полученные формулы дают решения серии аналогичных задач с различными пленками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Пилатовский В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М.: Недра, 1966. 317 с.
- 2 Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 513 с.
- 3 Абдурахманов И.М., Алишаев М.Г. Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 173-177.
- 4 Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с.
- 5 Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242-247.
- 6 Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312 с.
- 7 Крутицкий П.А. Задача Дирихле для уравнений Стокса вне разомкнутых кривых на плоскости // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1161-1174.
- 8 Крутицкий П.А., Прозоров К.В. К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268-1283.
- 9 Krutitskii P.A. The modified jump problem for the Laplace equation and singularities at the tips // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 183. pp. 232-240.
- 10 Номировский Д.А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1390-1399.
- 11 Белоцерковский П.М. Неустановившиеся колебания бесконечной струны, несущей сосредоточенную массу и поддерживаемую упруговязкими подвесками // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 5. С. 791-812.
- 12 Головатый Ю.Д. О собственных колебаниях и собственных частотах упругого стержня с присоединенной массой // УМН. 1988. Т. 43. Вып. 4. С. 173-174.
- 13 Гомес Д., Назаров С.А., Перес М.Е. Формальная асимптотика собственных частот колебаний упругого трехмерного тела с концентрированными массами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2007. Т. 342. С. 31-76.
- 14 Культербаев Х.П., Исламова О.В. Математическая модель колебаний подвешенной струны с сосредоточенной массой // Изв. высш. учеб. завед. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2007. № 4. С. 41-46.

15 Мельник Т. А., Попов А. В. Асимптотический анализ краевых и спектральных задач в тонких перфорированных областях с быстро изменяющейся толщиной и различными предельными размерностями // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 8. С. 97–124.

16 Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Проблема устойчивости для замкнутой релятивистской струны с точечной массой // Вестник Тверского ГУ. Серия: Физика. 2005. № 9 (15). Вып. 2. С. 114-123.

17 Перес М. Е., Чечкин Г. А., Яблокова Е. И. О собственных колебаниях тела с «легкими» концентрированными массами на поверхности // УМН. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.

18 Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // УМН. 2008. Т. 63. Вып. 1(379). С. 111–154.

19 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

20 Чечкин Г.А. Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // УМН. 2004. Т. 59. Вып. 4. С. 205-206.

21 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1550-1556.

(Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. No. 9. pp. 1489-1495).

22 Холодовский С.Е. Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 7. С. 1209-1213.

(Kholodovskii S. E. A method of Fourier series for solution of problems in piecewise inhomogeneous domains with rectilinear crack (screen) // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. Vol. 48. No. 7. pp. 1140-1144).

23 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855-859.

(Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. Vol. 45. No. 6. pp. 873-877).

24 Холодовский С.Е. Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1204-1208.

(Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // *Differential Equations*. 2009. Vol. 45. No. 8. pp. 1229-1233).

25 Холодовский С.Е. О решении краевых задач на кусочно-однородной плоскости с параболической трещиной (завесой) // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. 2009. Т. 49. № 11. С. 1931-1936.

(Kholodovskii S. E. Solution of Boundary Value Problems for Laplace's Equation in a Piecewise Homogeneous Plane with a Parabolic Crack (Screen) // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009. Vol. 49. No. 11. pp. 1847–1852).

26 Холодовский С.Е., Гуримская И.А., Игнатьева Н.В. О решении краевых задач на неоднородной плоскости с трещиной и завесой, соединенными последовательно // *Дифференц. уравнения*. 2011. Т. 47. № 3. С. 396-404.

(Kholodovskii S. E., Gurimskaya I. A., Ignat'eva N.V. On the Solution of Boundary Value Problems on an Inhomogeneous Plane with a Crack and a Barrier Connected in Series // *Differential Equations*. 2011. Vol. 47. No. 3. pp. 393-401).

27 Холодовский С.Е., Шадрина Н.Н. О решении краевых задач с обобщенными условиями сопряжения типа трещины (завесы) // *Известия вузов. Математика*. 2011. № 6. С. 100-106.

(Kholodovskii S. E., Shadrina N.N. Solution of Boundary-Value Problems with Generalized Transmission Conditions of the Type of a Crack or a Screen // *Russian Mathematics*. 2011. Vol. 55. No. 6. pp. 85-90).

28 Холодовский С.Е., Нутчина-Пестрякова Н.В. О решении краевых задач в цилиндрах, разделенных трехслойной пленкой на два полуцилиндра // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. 2012. Т. 52. № 7. С. 1261-1266.

29 Холодовский С.Е. О решении краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости с трехслойным пленочным включением // *Дифференц. уравнения*. 2013. Т. 49. № 12. С. 1697-1701.

(Kholodovskii S. E. On the Solution of Boundary Value Problems for the Laplace Equation on the Plane with a Three-Layer Film Inclusion // *Differential Equations*. 2013. Vol. 49. No. 12. pp. 1655–1660).

30 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

Список работ исполнителей НИР по данному гос. заданию за 2014 г.

1 Холодовский С. Е. Об эффективном решении задачи о движении неограниченной струны с точечной массой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 1. С. 105-112. **Из перечня Web of Science, Scopus.**

(Kholodovskii S. E. Effective Solution of the Problem of Motion of an Infinite String with an Attached Point Mass // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55. No. 1. pp. 101–108). **Из перечня Web of Science, Scopus.**

2 Холодовский С. Е. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в плоских областях, ограниченных сильно- и слабопроницаемыми пленками, соединенными последовательно // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Серия «Физика, математика, техника, технология» № 3(56). 2014. С. 104-109. **Из перечня ВАК.**

3 Холодовский С. Е., Ефимова И.А. Об оптимальном расположении дренажа под бетонной плотиной с эллиптическим флютбетом // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Серия «Физика, математика, техника, технология» № 3(56). 2014. С. 100-103. **Из перечня ВАК.**

4 Холодовский С. Е. Новый метод решения задач математической физики в областях с сингулярными возмущениями. Монография. Чита. Изд-во ЗабГУ. 2014. 222 с.

Приложение А

Доказательство теоремы 1.1 в случае сильно проницаемой пленки

Рассмотрим для функций $u_i(x, y)$ в D_i класс краевых задач (1.1), (1.2):

$$\partial_x^2 u_1 + Lu_1 = 0, \quad M_\theta u_1|_{(x,y) \in S} = 0, \quad x < 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_x^2 u_2 + Lu_2 = H(x, y), \quad M_\theta u_2|_{(x,y) \in S} = h_\theta(x, y), \quad x > 0, \quad (\text{A.2})$$

с условиями сопряжения (1.3) для сильно проницаемой пленки $x = 0$ вида

$$x = 0: \quad u_2 = u_1, \quad k_2 \partial_x u_2 - k_1 \partial_x u_1 = A \partial_x^2 u_1. \quad (\text{A.3})$$

Выразим решение этой задачи через решение классической задачи (1.4):

$$\partial_x^2 f + Lf = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad M_\theta f|_{(x,y) \in S} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h_\theta(x, y), & x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Следуя разработанному методу, для вывода общих формул рассмотрим частные модельные случаи задач (A.1)-(A.3) и (A.4), допускающие применение метода Фурье по переменной y (вдоль пленки). В качестве модельных задач рассмотрим простейшие случаи задач (A.1)-(A.3) и (A.4) для оператора Лапласа ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$) на плоскости вида

$$\Delta u_1 = 0, \quad x < 0; \quad \Delta u_2 = H(x, y), \quad x > 0 \quad (\text{A.5})$$

при выполнении условий сопряжения (A.3) и

$$\Delta f = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H(x, y), & x > 0, \end{cases} \quad |f| = O(1), \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (\text{A.6})$$

где $H \in C^1(x > 0)$. Выразим решение задачи (A.5), (A.3) через решение $f(x, y)$ классической задачи (A.6).

Предположим, что функция $f(0, y)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $f_i(\lambda)$:

$$f(0, y) = \int_0^{\infty} g d\lambda, \quad g(y, \lambda) = f_1 \sin \lambda y + f_2 \cos \lambda y. \quad (\text{A.7})$$

Отсюда функция $f(x, y)$ в полуплоскости $x < 0$, где она удовлетворяет уравнению Лапласа (A.6) имеет вид

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} g d\lambda, \quad x < 0. \quad (\text{A.8})$$

Представим решение модельной задачи (A.5), (A.3) в виде

$$u_1(x, y) = \int_0^{\infty} a_1 e^{\lambda x} g d\lambda, \quad u_2(x, y) = f(x, y) + \int_0^{\infty} a_2 e^{-\lambda x} g d\lambda, \quad (\text{A.9})$$

где функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (A.7), $a_i(\lambda)$ – неизвестные параметры.

Приравнивая в условиях сопряжения (A.3) коэффициенты слева и справа при функции $g(y, \lambda)$ под знаками интегралов (A.8), (A.9), находим

$$a_1 = \frac{2k_2}{A(\lambda + \gamma)}, \quad a_2 = -1 + \frac{2k_2}{A(\lambda + \gamma)},$$

где

$$\gamma = \frac{k_1 + k_2}{A}. \quad (\text{A.10})$$

При этом с учетом разложения функции $f(x, y)$ (A.8) решение u_i (A.9) задачи (A.5), (A.3) примет вид

$$u_1(x, y) = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} g}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x < 0, \quad (\text{A.11})$$

$$u_2(x, y) = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} g}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x > 0. \quad (\text{A.12})$$

Из разложения функции $f(x, y)$ (A.8) следует формула

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(x-t, y) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda, \quad x < 0, \quad \gamma > 0.$$

Отсюда функции $u_i(x, y)$ (A.11), (A.12) непосредственно выражаются через функцию $f(x, y)$ без разложений Фурье:

$$u_1 = \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(x-t, y) dt, \quad x < 0, \quad (\text{A.13})$$

$$u_2 = f(x, y) - f(-x, y) + \frac{2k_2}{A} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(-x-t, y) dt, \quad x > 0, \quad (\text{A.14})$$

где $\gamma > 0$ имеет вид (A.10). Выражения справа (A.13), (A.14) являются операторами, действующими на функцию $f(x, y)$ по одной переменной x (y – параметр). Отсюда формулы (A.13), (A.14) дают решение общих классов задач (A.1)-(A.3), где $f(x, y)$ – решение задачи (A.4), удовлетворяющее условию $|f(x, y)| = O(e^{\alpha|x|})$, $x \rightarrow -\infty$, $0 < \alpha < \gamma$, что проверяется непосредственно.